مقسوم‌علیه و مضرب

◈ **یادآوری تقسیم:** با مفهوم تقسیم و روش انجام آن قبلاً آشنا شده‌اید و می‌دانید که مثلاً عبارت مقابل به این معنی است که اگر ما بخواهیم ۲۴ لوبیا را به دسته‌های ۹ تایی تقسیم کنیم، ۲ دسته ایجاد می‌شود و ۶ لوبیا اضافه می‌آید.

$$\begin{array}{r|l} ۲۴ & ۹ \\ \cline{2-2} -۱۸ & ۲ \\ \cline{1-1} ۶ & \end{array}$$

هر یک از ۴ جزء تقسیم را به شکل مقابل اسم‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} \text{مقسوم} & \text{مقسوم‌علیه} \\ \cline{2-2} & \text{خارج‌قسمت} \\ \cline{1-1} \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

روابط تقسیم که در هر تقسیمی برقرارند، عبارتند از:

باقی‌مانده + مقسوم‌علیه × خارج‌قسمت = مقسوم

مقسوم‌علیه > باقی‌مانده

دقت کن!

دلیل درستی این دو رابطه ساده است؛ در رابطه‌ی اول، عبارت «مقسوم‌علیه×خارج‌قسمت» مساوی تعداد کل اعضای دسته‌ها است که وقتی با تعداد باقی‌مانده جمع شود، تعداد کل (یعنی مقسوم) را به ما می‌دهد. در رابطه‌ی دوم هم، اگر باقی‌مانده مساوی مقسوم‌علیه یا بزرگ‌تر از آن باشد، یک دسته به اندازه‌ی مقسوم‌علیه از آن ایجاد می‌شود و آن‌قدر این کار ادامه می‌یابد تا مقدار باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

اگر هر یک از این ۴ قسمت را با یک حرف انگلیسی نشان دهیم، می‌توانیم روابط تقسیم را به‌شکل زیر نمایش دهیم:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

$$\begin{cases} a = bq + r \\ ۰ \le r < b \end{cases}$$

خوب است بدانی

علامت‌های $\le$ یا $\ge$ علامت‌های «بزرگ‌تر مساوی» یا «کوچک‌تر مساوی» نام دارند. این دو علامت مثل علامت‌های $>$ و $<$ هستند، تنها با این تفاوت که دو طرف آن‌ها می‌توانند مساوی هم باشند. مثلاً عبارت‌های $۴ \ge ۳$ و $۳ \ge ۳$ هر دو درست هستند؛ اما عبارت $۴ > ۳$ درست و $۳ > ۳$ نادرست است. با این تعریف در عبارت $x \le ۷$، x می‌تواند تمام اعداد کوچک‌تر از ۷ یا خود ۷ باشد.

مثال حاصل تقسیم ۵۴۶۵۴۶ بر ۵۴۶ چند است؟

حل

$$\begin{array}{r|l} ۵۴۶۵۴۶ & ۵۴۶ \\ \cline{2-2} -۵۴۶ & ۱۰۰۱ \\ \cline{1-1} ۰۵۴۶ & \\ ۵۴۶ & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

دقت کنید که تقسیم را یک رقم یک رقم انجام می‌دهیم و هر رقمی را که از مقسوم، پایین آوردیم، باید یک رقم به خارج‌قسمت اضافه کنیم و اگر نخورد، در خارج‌قسمت صفر بگذاریم. پس کسانی که جواب این سؤال را ۱۱ درآورده‌اند، گول خورده‌اند و حواس‌شان پرت بوده است.

مثال **در تقسیم یک عدد بر ۴، باقی‌مانده چه اعدادی ممکن است باشد؟**

حل

چون باقی‌مانده باید از مقسوم‌علیه (یعنی ۴) کم‌تر باشد، پس می‌تواند ۰ ، ۱ ، ۲ یا ۳ باشد.

مثال **در تقسیمی، باقی‌مانده ۴ و مقسوم‌علیه ۱۱ است. حداکثر چه‌قدر می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت تغییر نکند؟**

> **خوب است بدانی**
>
> *حداقل، یعنی کم‌ترین مقدار. در فارسی به آن «کمینه» هم می‌گویند.*
>
> *حداکثر، یعنی بیش‌ترین مقدار. در فارسی به آن «بیشینه» می‌گویند.*

حل

باقی‌مانده ۴ است. برای این‌که به یک دسته کامل (یعنی ۱۱) برسد و تعداد دسته‌ها (خارج‌قسمت) یکی اضافه شود، باید به آن ۷تا اضافه کنیم. پس اگر ۷تا به عددمان (یعنی مقسوم) اضافه کنیم، خارج‌قسمت تغییر می‌کند. بنابراین برای تغییر نکردن خارج قسمت، حداکثر ۶ واحد می‌توانیم به مقسوم اضافه کنیم.

مثال **در تقسیمی، باقی‌مانده ۴ و مقسوم‌علیه ۱۱ است. حداقل چند واحد به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت ۳ واحد افزوده شود؟**

حل

باقی‌مانده ۴ است. اگر ۷ تا به آن اضافه شود، می‌شود یک دسته‌ی کامل ۱۱ تایی و یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌شود. حالا باید ۲ واحد دیگر به خارج قسمت اضافه شود، یعنی باید ۲ دسته‌ی کامل دیگر ایجاد کنیم که برای این‌کار باید ۲ تا ۱۱ تایی به عددمان اضافه کنیم. پس جواب این سؤال می‌شود: $۷+۲\times۱۱=۷+۲۲=۲۹$

> **یه جور دیگه!**
>
> *برای این‌که ۳ واحد به خارج قسمت اضافه شود، باید ۳ دسته‌ی ۱۱ تایی به عددمان اضافه کنیم، یعنی ۳۳ تا. از این ۳۳ تا، ۴ تا را داریم، پس می‌ماند ۲۹ تا.*

◈ **بخش‌پذیری:** اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b صفر باشد، می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است. در این حالت b را مقسوم‌علیه (شمارنده) a و a را مضرب b می‌نامیم. مثلاً:

$$\begin{array}{r|l} ۲۴ & ۶ \\ \cline{2-2} & ۴ \\ \overline{\;۰\;} & \end{array}$$

> **خوب است بدانی**
>
> *«شمارنده» فارسی و «مقسوم‌علیه» عربی است. هر دو هم زیاد به‌کار می‌روند.*

بنابراین ۲۴ بر ۶ بخش‌پذیر است و ۶ شمارنده‌ی ۲۴ و ۲۴ مضرب ۶ است.

قوانین باقی‌مانده

۱ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱، مساوی صفر است، چون تمام اعداد بر ۱ بخش‌پذیرند.

۲ باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد زوج بر ۲، مساوی صفر و باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد فرد بر ۲، مساوی ۱ است.

۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۳، مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «مجموع ارقام» آن عدد بر ۳.

اثبات (دلیل): فرض کنید عددی چهار رقمی به‌صورت $\overline{abcd}$ داریم (برای تعداد ارقام بیش‌تر هم به همین شکل است). این عدد را باز می‌کنیم (بسط می‌دهیم). در این عدد d دسته‌ی یکی، c دسته‌ی ۱۰تایی، b دسته‌ی ۱۰۰تایی و a دسته‌ی ۱۰۰۰تایی داریم. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a$$
$$= d + (۹c + c) + (۹۹b + b) + (۹۹۹a + a)$$

دقت کن!

برای نشان دادن ارقام یک عدد در کنار هم، در صورتی که بعضی ارقام مجهول باشند، بالای عدد خط می‌گذاریم. مثلاً $\overline{۲x}$ یعنی یک عدد دورقمی که یکان آن رقم مجهول x و دهگانش ۲ است. همچنین $\overline{xyz}$ یعنی یک عدد سه رقمی که یکان و دهگان و صدگان آن به‌ترتیب z، y و x است. اما xy یعنی حاصل‌ضرب دو عدد x و y که خود این دو عدد می‌توانند هرچند رقمی باشند.

می‌خواهیم باقی‌مانده‌ی تقسیم این عبارت بر ۳ را به‌دست آوریم. پس می‌توانیم دسته‌های ۳تایی کامل را کنار بگذاریم و ببینیم چه مقداری باقی می‌ماند. چون ۹ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس عبارت ۹c هم بر ۳ بخش‌پذیر است و موقع حساب کردن باقی‌مانده بر ۳ می‌توانیم آن را کنار بگذاریم. همین‌طور ۹۹b و ۹۹۹a هم بر ۳بخش‌پذیرند و کنارشان می‌گذاریم. نهایتاً می‌ماند $d + c + b + a$ یعنی مجموع ارقام عدد. پس برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۳، می‌توانیم مجموع ارقام آن عدد را به‌دست آورده و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن را بر ۳ بیابیم.

دقت کن!

برای اثبات، یک عدد ۴ رقمی در نظر گرفتیم. اما برای تعداد ارقام بیش‌تر هم روش اثبات همین است و فرقی ندارد.

دقت کن!

تقریباً تمام قوانین باقی‌مانده به همین شکل اثبات می‌شود. اگر بر این روش مسلط شوید، خودتان هم می‌توانید برای اعداد مختلف، قانون باقی‌مانده و بخش‌پذیری کشف کنید. سعی کنید حداقل یکی دوتا قانون این مدلی کشف کنید. کیف دارد.

مثال باقی‌مانده‌ی تقسیم $\underbrace{۵\,۵\,۵\,...\,۵}_{۱۰۰\text{تا}}$ بر ۳ چند است؟

حل

مجموع ارقام $= ۱۰۰ \times ۵ = ۵۰۰$

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۰ & ۳ \\ \hline & ۱۶۶ \\ ۲ & \end{array}$$

پس باقی‌مانده‌ی عدد اصلی بر ۳ مساوی ۲ است.

دقت کن!

وقتی می‌خواهیم باقی‌مانده‌ی ۵۰۰ بر ۳ را حساب کنیم هم می‌توانیم از همین قانون استفاده کنیم.

مجموع ارقام $= ۵ + ۰ + ۰ = ۵ \rightarrow$ باقی‌مانده بر ۳ $= ۲$

یعنی خیلی اوقات قوانین باقی‌مانده را در چند مرحله روی عددمان اعمال می‌کنیم تا به‌باقی‌مانده‌ی نهایی برسیم. باقی‌مانده‌ی نهایی از آن‌جا مشخص می‌شود که باید حتماً از مقسوم‌علیه کوچک‌تر باشد.

مثال **x را طوری تعیین کنید که عدد $\overline{۲۳x۵}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.**

حل

مجموع ارقام $= ۲ + ۳ + x + ۵ = ۱۰ + x$

برای این که عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن بر ۳، صفر شود، پس x می‌تواند یکی از ارقام ۲، ۵ یا ۸ باشد. یعنی این سؤال ۳ جواب دارد.

۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۴ مساوی است با باقی‌مانده تقسیم «یکان + ۲ برابر دهگان» آن عدد بر ۴.

اثبات: با همان روش قبلی داریم:

$$\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a = d + (۸c + ۲c) + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a$$

عبارات $۸c$ ، $۱۰۰b$ ، $۱۰۰۰a$ (و اگر تعداد ارقام بیش‌تر باشد، بقیه‌ی عبارت‌ها در ادامه‌ی عبارت بالا) همگی بر ۴ بخش‌پذیرند، پس برای به‌دست آوردن باقی‌مانده بر ۴، آن‌ها را کنار می‌گذاریم. می‌ماند $d + ۲c$، یعنی: یکان + ۲ برابر دهگان.

یه جور دیگه!

چون رقم صدگان، هزارگان و ارقام قبل از آن‌ها تاثیری در باقی‌مانده بر ۴ ندارند، پس می‌توانیم بگوییم: باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۴ مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن» بر ۴.

مثال **باقی‌مانده‌ی تقسیم ۵۷۴۳۲۱۷ بر ۴ چند است؟**

حل

$۷ + ۲ \times ۱ = ۹ \rightarrow$ باقی‌مانده بر ۴ $= ۱$

۵ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۵، مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «یکان» آن عدد بر ۵.

اثبات:

$$\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a$$

عبارات $۱۰c$ ، $۱۰۰b$ ، $۱۰۰۰a$ همگی بر ۵ بخش‌پذیرند، پس فقط می‌ماند d، یعنی یکان.

۶ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۶، مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «یکان + ۴ برابر مجموع بقیه‌ی ارقام» آن عدد بر ۶.

اثبات: $\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a = d + (۶c + ۴c) + (۹۶b + ۴b) + (۹۹۶a + ۴a)$

عبارات ۶c، ۹۶b و ۹۹۶a بر ۶ بخش‌پذیرند، پس فقط می‌ماند $d + ۴c + ۴b + ۴a$، یعنی یکان به علاوه‌ی ۴ برابر بقیه‌ی ارقام.

مثال باقی‌مانده‌ی تقسیم $\underbrace{۵۵۵ ... ۵}_{۱۰۰ \text{ تا}}$ بر ۶ چند است؟

حل

$$۵ + ۴(\underbrace{۵ + ۵ + ... + ۵}_{۹۹ \text{ تا}}) = ۵ + ۴ \times ۹۹ \times ۵ = ۵ + ۱۹۸۰ = ۱۹۸۵$$

حالا باید باقی‌مانده‌ی ۱۹۸۵ بر ۶ را به‌دست آوریم. باز هم از همین قانون استفاده می‌کنیم.

$۱۹۸۵ \rightarrow$ باقی‌مانده بر ۶ $= ۵ + ۴(۸ + ۹ + ۱) = ۵ + ۴ \times ۱۸ = ۷۷$

$۷۷ \rightarrow$ باقی‌مانده بر ۶

$$\begin{array}{r|l} ۳۵ & ۶ \\ \hline ۵ & \\ \hline ۵ & \end{array}$$

پس باقی‌مانده‌ی عدد اصلی بر ۶، مساوی ۵ است.

۷ deleted

در پرانتز

برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۷ هم چند راه مختلف وجود دارد. اما همه‌شان سخت هستند و به‌جای این‌که کار ما را آسان‌تر کنند، سخت‌تر می‌کنند. هر موقع خواستید باقی‌مانده‌ی عددی را بر ۷ به‌دست آورید، خیلی ساده تقسیم کنید. نبینم از کتاب‌های مختلف قانون باقی‌مانده بر ۷ و ۱۳ و ۱۷ و ... را در آورید و آن‌ها را حفظ کنید. این‌ها نه به درد دنیا می‌خورند، نه آخرت و حفظ کردن‌شان کار بی‌فایده‌ای است. علم ریاضی، علم تفکر است نه حفظیات.

۸ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۸، مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «یکان + ۲ برابر دهگان + ۴ برابر صدگان» بر ۸.

اثبات: $\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a = d + (۸c + ۲c) + (۹۶b + ۴b) + ۱۰۰۰a$

عبارات ۸c و ۹۶b و ۱۰۰۰a بر ۸ بخش‌پذیرند، پس می‌ماند $d + ۲c + ۴b$.

یه جور دیگه!

می‌توانیم این قانون را کمی تغییر دهیم و به‌صورت مقابل درآوریم: باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۸، مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «عدد سه‌رقمی حاصل از سه رقم سمت راست آن» بر ۸.

مثال باقی‌مانده‌ی تقسیم ۲۵۷۳۴۱۶۳ بر ۸ چند است؟

حل

$۳ + ۲ \times ۶ + ۴ \times ۱ = ۳ + ۱۲ + ۴ = ۱۹ \longrightarrow$ باقی‌مانده بر ۸ = ۳

۹ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۹، مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم «مجموع ارقام» آن عدد بر ۹.

اثبات: $\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a = d + (۹c + c) + (۹۹b + b) + (۹۹۹a + a)$

عبارات ۹c ، ۹۹b و ۹۹۹a بر ۹ بخش‌پذیرند، پس فقط می‌ماند $d + c + b + a$، یعنی مجموع ارقام.

مثال در عبارت $\overline{۱۲۳۴۴۳?۵۴۴} = ۹۹۹۹ \times ۱۲۳۴۵۶$ رقم مجهول چند است؟

حل

چون ۹۹۹۹ بر ۹ بخش‌پذیر است، پس حاصل‌ضرب آن در هر عددی هم بر ۹ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد سمت راست تساوی باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

مجموع ارقام $= ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۴ + ۳ + ? + ۵ + ۴ + ۴ = ۳۰ + ?$

برای این‌که $? + ۳۰$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم $? = ۶$

۱۰ باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۰، مساوی است با خود «یکان» آن عدد.

اثبات: $\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a$

عبارات ۱۰c ، ۱۰۰b و ۱۰۰۰a بر ۱۰ بخش‌پذیرند، پس فقط می‌ماند d که چون از ۱۰ هم کم‌تر است، پس خودش می‌تواند باقی‌مانده بر ۱۰ باشد.

خوب است بدانی

باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۰۰، مساوی است با عدد حاصل از دو رقم سمت راست.

باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۰۰۰، مساوی است با عدد حاصل از سه رقم سمت راست.

و به‌همین ترتیب برو جلو.

مثال باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۰، مساوی ۸ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۵ چند است؟

حل

یکان آن ۸ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۵ مساوی است با باقی‌مانده‌ی تقسیم ۸ بر ۵ که می‌شود ۳.

۱۱ برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۱، ارقام را از سمت راست یکی در میان با هم جمع می‌کنیم. ارقام باقی‌مانده را نیز با هم جمع می‌کنیم. سپس حاصل جمع اولی را منهای دومی می‌کنیم تا باقی‌مانده بر ۱۱ به‌دست آید.

اثبات: $\overline{abcd} = d + ۱۰c + ۱۰۰b + ۱۰۰۰a = d + (۱۱c - c) + (۹۹b + b) + (۱۰۰۱a - a)$

عبارات ۱۱c، ۹۹b و ۱۰۰۱a بر ۱۱ بخش‌پذیرند، پس فقط می‌ماند $d - c + b - a$ یا $(d + b) - (c + a)$.

> **نکته** در هنگام به‌دست آوردن باقی‌مانده، می‌توانیم هرچند تا دسته‌ی کامل (یعنی به اندازه‌ی مقسوم‌علیه) که دلمان خواست، به عددمان اضافه یا کم کنیم. این کار تأثیری بر باقی‌مانده ندارد. مثلاً موقع حساب کردن باقی‌مانده‌ی عددی بر ۱۱، هرچند تا دسته‌ی ۱۱ تایی که به عددمان اضافه یا کم کنیم، بر باقی‌مانده تأثیری ندارد. تأثیر آن روی خارج قسمت است.

مثال باقی‌مانده‌ی اعداد زیر را بر ۱۱ به‌دست‌آورید.

الف) ۵۷۳۱۲ ب) ۵۳۴۰۹۲۶ پ) ۴۸۵۶۳۳۲

حل

الف) $\left.\begin{array}{l} ۲+۳+۵=۱۰ \\ ۱+۷=۸ \end{array}\right\} \rightarrow ۱۰-۸=\boxed{۲}$

ب) $\left.\begin{array}{l} ۶+۹+۴+۵=۲۴ \\ ۲+۰+۳=۵ \end{array}\right\} \rightarrow ۲۴-۵=\boxed{۱۹}$

چون ۱۹ از ۱۱ بزرگ‌تر است و نمی‌تواند باقی‌مانده باشد، یک دسته‌ی ۱۱تایی از آن کم می‌کنیم.

$۱۹-۱۱=\boxed{۸}$

پ) $\left.\begin{array}{l} ۲+۳+۵+۴=۱۴ \\ ۳+۶+۸=۱۷ \end{array}\right\} \rightarrow$

چون ۱۴ منهای ۱۷ نمی‌شود، یک دسته‌ی ۱۱تایی به آن اضافه می‌کنیم.

$۱۴+۱۱=۲۵$ $۲۵-۱۷=\boxed{۸}$

> **نکته** برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی یک عبارت ریاضی بر یک عدد، باقی‌مانده‌ی اعداد مختلف آن را به‌دست می‌آوریم و به جایشان می‌گذاریم و به اعمال ریاضی دست نمی‌زنیم.

مثال **باقی‌مانده‌ی حاصل عبارت ۳۴۹۷ + ۹۵۶۳ × ۵۱۳۴۵۶۷ بر ۳ چند است؟**

حل

۵۱۳۴۵۶۷ ← مجموع ارقام = ۳۱ ← باقی‌مانده بر ۳ = ۱

۹۵۶۳ ← مجموع ارقام = ۲۳ ← باقی‌مانده بر ۳ = ۲

۳۴۹۷ ← مجموع ارقام = ۲۳ ← باقی‌مانده بر ۳ = ۲

⇐ باقی‌مانده‌ی عبارت بر ۳ = ۱×۲+۲ = ۴ $\xrightarrow{-۳}$ $\boxed{۱}$

مثال **اگر $x = ۲۳۱$ و $y = ۵۶۹$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳y - ۲x$ بر ۵ چند است؟**

حل

$۳y - ۲x = ۳\times ۵۶۹ - ۲\times ۲۳۱$ ← باقی‌مانده بر ۵ = ۳×۴ − ۲×۱ = ۱۰

چون ۱۰ از ۵ بزرگ‌تر است، باید باقی‌مانده‌ی آن را هم بر ۵ حساب کنیم که می‌شود صفر، پس عبارت بر ۵ بخش‌پذیر است.

قانون بخش‌پذیری بر اعداد بزرگ

برای به‌دست آوردن قانون بخش‌پذیری بر یک عدد بزرگ، آن عدد را طوری به‌صورت حاصل‌ضرب چند عدد می‌نویسیم که این اعداد شمارنده‌ی مشترکی نداشته باشند. مثلاً ۱۲ را می‌توانیم به‌صورت ۳×۴ بنویسیم، پس اعدادی بر ۱۲ بخش‌پذیرند که هم بر ۴ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

> **دقت کن!**
> *ممکن است کسی بگوید چون ۶×۲=۱۲، پس اعدادی بر ۱۲ بخش‌پذیرند که هم بر ۲ و هم بر ۶ بخش‌پذیر باشند. این حرف غلط است، چون ۲ و ۶ هر دو دارای شمارنده مشترک ۲ هستند. به‌عنوان مثال ۱۸ هم بر ۲ و هم بر ۶ بخش‌پذیر است، اما بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست.*

خلاصه‌ای از قوانین بخش‌پذیری بر اعداد بزرگ معروف در زیر آمده است:

- اعدادی بر ۶ بخش‌پذیرند که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۱۲ بخش‌پذیرند که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۱۵ بخش‌پذیرند که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۱۸ بخش‌پذیرند که هم بر ۲ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۲۴ بخش‌پذیرند که هم بر ۳ و هم بر ۸ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۳۶ بخش‌پذیرند که هم بر ۴ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۷۲ بخش‌پذیرند که هم بر ۸ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشند.
- اعدادی بر ۳۰ بخش‌پذیرند که هم بر ۲ و هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشند.

دقت کن!

با این قوانین فقط بخش‌پذیر بودن یا نبودن بر یک عدد را می‌توان فهمید. با آن‌ها نمی‌توانیم باقی‌مانده را حساب کنیم. مثلاً برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی یک عدد بر ۱۲، قانون ساده‌ای نداریم و باید از تقسیم کردن استفاده کنیم.

خوب است بدانی

اعدادی بر ۲۵ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آن‌ها ۰۰ ، ۲۵ ، ۵۰ یا ۷۵ باشد. نخواستی هم ندون!

مثال در عدد $\overline{1xy}$، ارقام x و y را طوری تعیین کنید که این عدد بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد.

حل

باید بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی یکانش هم باید زوج باشد و هم صفر یا ۵. پس یکان حتماً صفر است، یعنی $y = 0$. هم‌چنین باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، پس مجموع ارقام آن باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد که با دانستن $y = 0$، پس x می‌تواند ۲ یا ۵ یا ۸ باشد.

نکته

۱) اگر عددی بر عدد دیگری بخش‌پذیر باشد، بر تمام شمارنده‌های آن هم بخش‌پذیر است.

مثلاً هر عددی که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد، بر شمارنده‌های ۳۶ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸ و ۳۶ هم بخش‌پذیر است.

۲) هر عددی که بر چند عدد دیگر بخش‌پذیر باشد، بر کوچک‌ترین مضرب مشترک آن اعداد هم بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد، یعنی کوچک‌ترین عددی که مضرب همه‌ی آن اعداد باشد.

مثلاً اگر عددی بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد، حتماً بر ۱۲ بخش‌پذیر است (چون ۱۲ کوچک‌ترین مضرب مشترک ۴ و ۶ است).

۳) اگر چند عدد بر عدد دیگری بخش‌پذیر باشند، حاصل‌ضرب، حاصل جمع و حاصل تفریق‌شان هم بر آن عدد بخش‌پذیر است.

مثلاً چون ۱۵ و ۲۱ بر ۳ بخش‌پذیرند، اعداد زیر هم بر ۳ بخش‌پذیرند:

۲۱ × ۱۵ = ۳۱۵

۲۱+۱۵ =۳۶

۲۱ − ۱۵ =۶

۴) حاصل‌ضرب چند عدد، بر تک‌تک آن اعداد بخش‌پذیر است. مثلاً عدد ۳۱×۱۵×۱۴ بر ۱۴ و ۱۵ و ۳۱ بخش‌پذیر است.