

۱. گزینه «۳» همه عددهای $-172, -173, \dots$ و... از عدد 171 کوچک‌ترند و عدد 172 از همه این عددها بزرگ‌تر است.

$$10^5 = 100000$$

$$-10^5 = -100000$$

۲. گزینه «۱»

$$-100000, \underbrace{-99999, \dots, -1, 0, 1, \dots, 99999}_{\text{یکی}}, 100000$$

$$\text{تعداد کل} = 99999 \times 2 + 1 = 199999$$

۳. گزینه «۴» فاصله عدد 100 از 125 مساوی 25 واحد، همچنین فاصله عدد 100 از 25 مساوی 125 واحد است. همان‌طور که می‌دانید 25 واحد 5 واحد 125 است.

۴. گزینه «۱» با یک مثال می‌توانیم به سادگی پاسخ درست را پیدا کنیم؛ فرض کنیم $a = -3$ و $b = -5$:

$$\left. \begin{array}{l} a = -3 \Rightarrow -a = 3 \\ b = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2 > 0$$

۵. گزینه «۳»

نکته عددهای صحیح نامثبت عددهایی هستند که مثبت نباشند؛ پس شامل صفر و عددهای صحیح منفی‌اند.

$$-170, \underbrace{-169, \dots, -1, 0, 1, \dots, 4, 5}_{\text{عددهای صحیح نامثبت}}$$

با توجه به نکته بالا داریم:

۶. گزینه «۳» عددهای صحیح کوچک‌تر از 154 عبارت‌اند از:

$$-155, -156, \dots, -160, -161, \dots$$

پس از بین گزینه‌ها 160 عدد مورد نظر است که بر 8 بخش پذیر است.

۷. گزینه «۲»

نکته عددهای صحیح نامنفی عددهایی هستند که منفی نباشند؛ پس شامل صفر و عددهای صحیح مثبت‌اند.

$$0/2 = \frac{2}{10} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{10}{2} = 5 \text{ عدد صحیح نامنفی است}$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{-28}{-7} = 4 \text{ عدد صحیح نامنفی است}$$

• عدد صحیح نامنفی است

$$\text{طبقه زهرا} = 19 - 13 = 6$$

$$\text{طبقه علی} = 6 + 9 = 15$$

$$\text{طبقه محمد} = 15 - 18 = -3 \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$\text{فاصله طبقات حسن و محمد} = 19 - (-3) = 19 + 3 = 22$$

۹. گزینه «۱»

نکته اگر تعداد علامت‌های منفی پشت یک عدد، فرد باشد، حاصل عددی منفی است.

$$-(-(-(\dots(-(-12)-(-5))\dots)))$$

$$-12 - (-5) = -12 + 5 = -7$$

پس سمت چپ 7 در مجموع 2021 علامت منفی داریم؛ در نتیجه حاصل عبارت، -7 می‌شود.

نکته

بین ابتدای حرکت، خود حرکت و انتهای آن روی محور اعداد، رابطه زیر برقرار است:
 انتهای حرکت = طول حرکت + ابتدای حرکت

طبق نکته بالا داریم: $-۶۰۵ + x = ۷۱۰ \Rightarrow x = ۷۱۰ - (-۶۰۵) = ۷۱۰ + ۶۰۵ = ۱۳۱۵$

طبق نکته سؤال قبل داریم: $x + ۹۳ = -۵۹ \Rightarrow x = -۵۹ - ۹۳ \Rightarrow x = -۱۵۲$

۲۰. گزینه «۱» نقطه وسط حرکت -۷۰ است؛ پس می‌توان گفت که -۷۰ میانگین ابتدا و انتهای حرکت است. بنابراین با در نظر گرفتن

به عنوان نقطه انتهای حرکت داریم: $\frac{-۴۹ + x}{۲} = -۷۰ \Rightarrow x + (-۴۹) = -۱۴۰ \Rightarrow x = -۱۴۰ + ۴۹ \Rightarrow x = -۹۱$

حالا با توجه به نکته سؤال ۱۸ داریم: $-۴۹ + y = -۹۱ \Rightarrow y = -۹۱ + ۴۹ \Rightarrow y = -۴۲$
 طول حرکت

۲۱. گزینه «۳» در این محور یک واحد کامل را ۱۷۵ در نظر می‌گیریم. هر واحد ۵ قسمت شده، پس هر قسمت کوچک برابر با $\frac{۱۷۵}{۵} = ۳۵$ است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حرکت اول: } ۱۲ \times ۳۵ = ۴۲۰ \\ \text{حرکت دوم: } ۲۰ \times (-۳۵) = -۷۰ \end{array} \right\} \Rightarrow ۴۲۰ + (-۷۰) = -۲۸۰$$

۲۲. گزینه «۴»

روی محور یک واحد کامل را ۶۱ در نظر می‌گیریم؛ پس:

$$\left. \begin{array}{l} \text{جمع مربوط به حرکت سمت چپ: } -۱۲۲ + ۳۰۵ = ۱۸۳ \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad ۲ \times (-۶۱) \quad ۵ \times ۶۱ \quad ۳ \times ۶۱ \\ \text{جمع مربوط به حرکت سمت راست: } ۳۰۵ + (-۱۲۲) = ۱۸۳ \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad ۵ \times ۶۱ \quad ۲ \times (-۶۱) \quad ۳ \times ۶۱ \end{array} \right\} \Rightarrow -۱۲۲ + ۳۰۵ = ۳۰۵ + (-۱۲۲)$$

$a + b = b + a$

خاصیت جابه‌جایی در جمع عددهای صحیح به صورت مقابل است:

نکته

۲۳. گزینه «۳» در این محور هر ۳ واحد کامل را ۲۱۶ در نظر می‌گیریم؛ پس هر واحد برابر با $\frac{۲۱۶}{۳} = ۷۲$ است.

$$\begin{array}{r} -۲۱۶ + ۳۶۰ = ۱۴۴ \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ ۳ \times (-۷۲) \quad ۵ \times ۷۲ \quad ۲ \times ۷۲ \end{array}$$

جمع مربوط به حرکتی که از سمت چپ محور شروع شده برابر است با:

$$\begin{array}{r} ۲۱۶ + (-۳۶۰) = -۱۴۴ \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ ۳ \times ۷۲ \quad ۵ \times (-۷۲) \quad ۲ \times (-۷۲) \end{array}$$

جمع مربوط به حرکتی که از سمت راست شروع شده برابر است با:

$-۲۱۶ + ۳۶۰ = -(۲۱۶ + (-۳۶۰))$

با دقت به دو تساوی به دست آمده، متوجه می‌شویم که حاصل آنها قرینه یکدیگر است؛ پس:

$-a + (-b) = -(a + b)$

حاصل جمع قرینه‌های دو عدد صحیح برابر است با قرینه مجموع آن دو عدد؛ یعنی:

نکته

۲۴. گزینه «۴» در محور هر ۴ واحد کامل را ۶۸ در نظر می‌گیریم؛ پس هر واحد مساوی ۱۷ است.

$۲ \times ۱۷ + ۴ \times ۱۷ = ۳۴ + ۶۸$

جمع مربوط به دو حرکت سمت راست برابر است با:

$۲ \times (-۱۷) + ۴ \times (-۱۷) = -۳۴ + (-۶۸)$

جمع مربوط به دو حرکت سمت چپ برابر است با:

$۳۴ + ۶۸ = -[(-۳۴) + (-۶۸)]$

طبق نکته سؤال قبل داریم:

$\Rightarrow -۳۴ + (-۶۸) = -(۳۴ + ۶۸)$



اولویت انجام عملیات در محاسبات ریاضی به ترتیب عبارت است از:

- ۱ پرانتز و گروه (در صورتی که بیش از یکی داشته باشیم، از داخلی ترین آنها شروع می‌کنیم).
- ۲ توان و ریشه‌گیری
- ۳ ضرب و تقسیم
- ۴ جمع و تفریق

توجه: در بین دو اولویت یکسان (مانند موردهای ۳ و ۴) اولویت با عملیاتی است که در محاسبه زودتر به آن می‌رسیم.

$$-2 - 19 \times 13 \div \frac{1}{2} \times (-8) - 2 \times 19 = -2 - 57 \div \frac{1}{2} \times (-8) - 38 = -2 - 57 \times 2 \times (-8) - 38 = \frac{-2 + 912}{910} - 38 = 872$$

$$-7 - 5(-3 - 2(3 - 5) - 2) - 3 + 4 \div 5 \times 2 = -5 + \frac{8}{5} = \frac{-25 + 8}{5} = \frac{-17 \times 2}{5 \times 2} = \frac{-34}{10} = -3/4$$

۲۶. گزینه «۱»

$$\begin{array}{r} \underbrace{-2}_{+4} \\ \underbrace{1}_{-1} \\ \underbrace{-1}_{+5} \\ \underbrace{-2}_{-5} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{array}$$

$$\Rightarrow -3/4 \div 6/8 = \frac{-34}{68} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$-6(2-4) - 3(2) - (-4)4 = -6(-2) - 6 + 16 = +12 + 10 = +22$$

۲۷. گزینه «۳»

$$8 - 4 \div 4(2(2) - 8 \div 2) + 1 = 7$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{1}_{6} \\ \underbrace{4}_{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow 7 - (-7) = 7 + 7 = 14$$

۲۸. گزینه «۴»

$$20 - 5 = 2 - (2)(-5) = 2 + 10 = 12$$

۲۹. گزینه «۳»

$$\Rightarrow -30(20 - 5) = -30 \times 12 = 2 - (-3)(12) = 2 + 36 = 38$$

۳۰. گزینه «۲» با توجه به عددهای باقی مانده در سمت راست تساوی، مشخص است که آخرین عدد پرانتز سمت چپ، ۴۵ و عدد قبل از آن، ۴۲ است. عدد آخر در پرانتز دوم باید ۳۹ باشد تا عبارت سمت راست حاصل شود. اگر عددها را بدون در نظر گرفتن پرانتزها کنار هم بنویسیم، داریم:

$$\overbrace{12 + 15 + 18 + \dots + 39 + 42 + 45 + 12 - 15 - 18 - \dots - 39}^{24} = 24 + 42 + 45 \Rightarrow x - y = 45 - 39 = 6$$

۳۱. گزینه «۲» مشابه سؤال قبل و با توجه به عددهای سمت راست تساوی می‌توان مقادیرهای m و n را مشخص کرد؛ بنابراین اگر عددها را بدون در نظر گرفتن پرانتزها کنار هم بنویسیم، داریم:

$$\overbrace{-54 - 65 - 36 - \dots + 72 + 81 + 90 + (-64) + 65 + 36 + \dots + (-72)}^{-118} = -118 + 81 + 90$$

$$\Rightarrow 2m - 3n = 2(90) - 3(+72) = 180 - 216 = -36$$

۳۲. گزینه «۴»

برای حل این سؤال می‌توانیم از راهبرد حل مسئله ساده‌تر استفاده کنیم:

$$10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90 \rightarrow \text{تعداد صفر} \rightarrow 1$$

$$10^3 - 10^2 - 10^1 = 1000 - 100 - 10 = 890 \rightarrow \text{تعداد صفر} \rightarrow 1$$

$$10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900 \rightarrow \text{تعداد صفر} \rightarrow 2$$

⋮

حال می‌توانیم الگویابی کنیم که تعداد صفرهای عدد حاصل برابر با کمترین توان است؛ پس پاسخ ۵۰۰ تا صفر دارد.

$$-104 = 4^2 - 2(-1) = 16 + 3 = 19$$

$$1201 = 1^2 - 2(12) = 1 - 24 = -23$$

$$(-104) \circ (1201) = 19 \circ (-23)$$

$$= (-23)^2 - 2(19) = 1225 - 38 = 1187$$

۳۳. گزینه «۱»

$$\dots \times -2 \times -1 \times 0 = 0$$

۳۴. گزینه «۱» حاصل ضرب همه عددهای صحیح نامثبت به صورت مقابل است:

۳۵. گزینه «۴» برای آنکه حاصل عبارت، کمترین مقدار ممکن شود، باید همه عددها منفی باشند؛ بنابراین سمت چپ عددهای

مثبت، علامت منفی و سمت چپ عددهای منفی، علامت مثبت قرار می‌دهیم. قبل از عدد ۵۹، ۳۰، علامت منفی و ۲۹ علامت مثبت داریم؛

بنابراین در خلاصه‌شده عبارت داده‌شده، علامت پشت ۵۹ مثبت است؛ بنابراین:

$$(-171) \ominus 59 \boxminus ((-61) + 73) \triangle (-22) = -264$$

۱۲

۳۶. گزینه «۳»

$$-2 - 2(-3 + 2(-4 - 4 \circ + 8 - 3) - 1) - 5 = 4 \Rightarrow -2 - 2(-3 + 2(1 - 4 \circ) - 1) - 5 = 4$$

$$\Rightarrow -2 - 2(-4 + 2(1 - 4 \circ)) - 5 = 4 \Rightarrow -7 - 2(-4 + 2 - 12 \circ) = 4 \Rightarrow -7 + 2 + 24 \circ = 4$$

$$\Rightarrow -5 + 24 \circ = 4 \Rightarrow 24 \circ = 4 + 5 \Rightarrow 24 \circ = 9 \Rightarrow \circ = \frac{9}{24} \Rightarrow \circ = \frac{3}{8}$$

۳۷. گزینه «۲»

عددهای منظم، عددهایی هستند که تفاضل هر دوتای متوالی‌شان با هم برابر است. به بیان دیگر در این عددها فاصله هر

دو عدد متوالی با هم برابر است.

تعداد این عددها برابر است با:

$$\frac{\text{عدد کوچک‌تر} - \text{عدد بزرگ‌تر}}{\text{فاصله}} + 1$$

$$\text{تعداد} \times \left(\frac{\text{عدد کوچک‌تر} + \text{عدد بزرگ‌تر}}{2} \right)$$

میانگین

مجموع عددهای منظم برابر است با:

نکته

طبق نکته بالا داریم:

$$3 + 6 + 9 + \dots + 1200 = \left(\frac{1200 + 3}{2} \right) (1200 - 3 + 1) = \left(\frac{1197}{2} + 1 \right) (1203) = (399 + 1) (1203) = 400 \times \frac{1203}{2} = 240600$$

۳۸. گزینه «۱»

$$(1-2) + (3-4) + \dots + (999-1000) = 500 \times (-1) = -500$$

برای به دست آوردن تعداد (-1) ها در عبارت بالا می‌توانیم از عددهای منفی یا مثبت استفاده کنیم. با توجه به نکته سؤال قبل داریم:

$$\frac{999-1}{2} + 1 = \frac{998}{2} + 1 = 499 + 1 = 500$$

$$500 \times (-500) = -500^2$$

حال برابر حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

گزینه ۳۹ «۳»

$$\dots + (-14) + (-7) + 0 + 7 + 14 + \dots = 0$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{\quad\quad\quad} \\ \vdots \\ \underbrace{\quad\quad\quad} \end{array}$$

گزینه ۴۰ «۱»

$$(50-51) - (52-53) + (54-55) - \dots - (500-501) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots + 1 = 0$$

عددها یک در میان ۱ و -۱ هستند و تعداد آنها زوج است (۲۲۶ تا)؛ بنابراین جمع کل، صفر می‌شود و قرینه صفر برابر صفر است.

گزینه ۴۱ «۳» حاصل هر دو عدد متوالی ۲ می‌شود؛ پس: $-8 + 10 - 20 + 210 - 40 + 410 - \dots - 780 + 7810 = 40 \times 2 = 80$

توجه کنید برای پیدا کردن تعداد ۲ها کافی است تعداد عددهای مثبت یا منفی را بدانیم:

$$\text{تعداد عددهای مثبت} = \frac{7810 - 10}{200} + 1 = \frac{7800}{200} + 1 = 39 + 1 = 40$$

فاصله بین عددهای مثبت

گزینه ۴۲ «۴» حاصل هر دو عدد متوالی -۳۴ می‌شود؛ پس: $-54 + 20 - 60 + 26 - 66 + 32 - \dots - 648 + 614 = 100 \times (-34)$

که با پیدا کردن تعداد عددهای مثبت می‌توانیم تعداد (-۳۴)ها را به دست آوریم:

$$\text{تعداد عددهای مثبت} = \frac{614 - 20}{6} + 1 = \frac{594}{6} + 1 = 99 + 1 = 100$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ \hline 24 \times 100 \\ \hline -27 \end{array} = +200$$

در نهایت خواسته مسئله را محاسبه می‌کنیم:

گزینه ۴۳ «۳»

$$2 - 3 + 7 - 8 + 12 - 13 + \dots + 497 - 498 + 502$$

$$= (-1) \times \left(\frac{497 - 2}{5} + 1 \right) + 502 = (-1) \times 100 + 502 = -100 + 502 = 402$$

تعداد عددهای مثبت

$$-19 + 20 - 18 + 23 - 2126 - 24 + \dots + 119 - 117$$

$$= -19 + 2 \times \left(\frac{119 - 20}{3} + 1 \right) = -19 + 2 \times 34 = -19 + 68 = 49$$

تعداد عددهای مثبت

$$(-61) + 40 + (-66) + 55 + (-71) + 70 + \dots + (-156) + 325$$

حاصل هر دو عدد متوالی در عبارت بالا یک الگوی جدید با فاصله‌های ۱۰+ به وجود آورده است که می‌توانیم با توجه به نکته سؤال ۳۷

$$\text{مجموع آنها را به دست آوریم:} \quad \text{مجموع} = \left[\frac{169 - (-21)}{10} + 1 \right] \times \left(\frac{-21 + 169}{2} \right) = \left(\frac{190}{10} + 1 \right) \times \left(\frac{148}{2} \right) = 20 \times \frac{148}{2} = 1480$$

حال محاسبه می‌کنیم که عدد ۱۴۸۰ چند واحد از ۱۴۸۰- بزرگ‌تر است: $1480 - (-1480) = 1480 + 1480 = 2 \times 1480 = 2960$

گزینه ۴۶ «۲» اولین عدد بعد از ۵۰۰- و مضرب ۱۷، عدد ۴۹۳- است و ۵ واحد بزرگ‌تر از آن عبارت است از: $-493 + 5 = -488$

حال عددهای مورد نظر بین ۱۰۰- و ۵۰۰- را می‌نویسیم:

برای پیدا کردن بقیه عددها نیز کافی است ۱۷ تا ۱۷ تا به آنها اضافه کنیم و حاصل جمع آنها را با توجه به نکته سؤال ۳۷ به دست آوریم:

$$\text{مجموع} = \left[\frac{(-114) - (-488)}{17} + 1 \right] \times \left[\frac{(-488) + (-114)}{2} \right] = \left(\frac{374}{17} + 1 \right) \times \left(-\frac{602}{2} \right) = (22 + 1) \times (-301) = (23) \times (-301) = -6923$$

۴۷. گزینه «۳» ابتدا مضرب‌های صحیح ۷- را که بین ۱۰۰۰- و ۱۰۰- قرار دارند می‌نویسیم:

حال کافی است یک واحد بیشتر از اولین عدد بزرگ‌تر از ۱۰۰۰- را که بر ۷ بخش پذیر است، به دست آوریم: $-۹۹۴ + ۱ = -۹۹۳$
در نهایت مجموع آنها را با توجه به نکته سؤال ۳۷ به دست می‌آوریم: $-۹۹۳, -۹۸۶, \dots, -۱۰۴$

$$\text{مجموع} = \left[\frac{-۱۰۴ - (-۹۹۳)}{۷} + ۱ \right] \left[\frac{-۹۹۳ + (-۱۰۴)}{۲} \right] = \left[\frac{۸۸۹}{۷} + ۱ \right] \left[\frac{-۱۰۹۷}{۲} \right] = \left(\frac{۱۲۷}{۱۲۸} + ۱ \right) \left(\frac{-۱۰۹۷}{۲} \right) = ۶۴ \times -۱۰۹۷$$

$$۶۴ \times ۷ - ۶۴ \times (-۱۰۹۷) = ۶۴ \times (۷ + ۱۰۹۷) = ۶۴ \times ۱۱۰۴ \quad \text{پس: } ۶۴ \times ۷ \text{ یعنی } ۷ \text{ مضرب } ۶۴ \text{ است}$$

۴۸. گزینه «۱» برای به دست آوردن مقدار X کافی است تعداد عددهای مثبت را با تعداد عددهای منفی مساوی قرار دهیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد عددهای مثبت} &= \frac{x - ۵۷}{۵} + ۱ \\ \text{تعداد عددهای منفی} &= \frac{-۷۰ - (-۹۶۰)}{۱۰} + ۱ = \frac{-۷۰ + ۹۶۰}{۱۰} + ۱ = \frac{۸۹۰}{۱۰} + ۱ = ۸۹ + ۱ = ۹۰ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x - ۵۷}{۵} + ۱ = ۹۰$$

$$\frac{x - ۵۷}{۵} = ۹۰ - ۱ \Rightarrow \frac{x - ۵۷}{۵} = ۸۹ \Rightarrow x - ۵۷ = ۴۴۵ \Rightarrow x = ۴۴۵ + ۵۷ \Rightarrow x = ۵۰۲ \quad \text{بنابراین:}$$

۴۹. گزینه «۲» برای حل این سؤال می‌توانیم از نکته سؤال ۳۷ استفاده کنیم:

$$\left[\frac{k - (-۴۲)}{۴} + ۱ \right] \left[\frac{-۴۲ + k}{۲} \right] = -۲۴۰ \Rightarrow \frac{k + ۴۲ + ۴}{۴} \times \frac{k - ۴۲}{۲} = -۲۴۰ \Rightarrow \frac{k + ۴۶}{۴} \times \frac{k - ۴۲}{۲} = -۲۴۰$$

$$\Rightarrow \frac{(k + ۴۶)(k - ۴۲)}{۸} = -۲۴۰ \Rightarrow (k + ۴۶)(k - ۴۲) = -۲۴۰ \times ۸ \Rightarrow (k + ۴۶)(k - ۴۲) = -۱۹۲۰$$

$(k + ۴۶)(k - ۴۲) = -۱۹۲۰$ یک معادله درجه دوم است که راه حل اصولی آن در سال دهم آموزش داده می‌شود. در سال نهم نیز با بهره‌گیری از اتحاد جمله مشترک می‌توانیم بعضی از آنها را حل کنیم؛ اما در اینجا مجبوریم ابتکار و خلاقیت به خرج دهیم! $(k + ۴۶)$ به اندازه ۸۸ واحد از $(k - ۴۲)$ بیشتر است؛ پس -۱۹۲۰ را به گونه‌ای تجزیه می‌کنیم که به دو عدد با این اختلاف (یعنی ۴۰ و ۴۸) برسیم؛
بنابراین:

$$(k + ۴۶)(k - ۴۲) = ۴۰ \times (-۴۸)$$

۵۰. گزینه «۲» حاصل تفریق دو پرانتز اول صفر است و بقیه پرانتزها هر کدام بعد از تأثیر علامت منفی مساوی ۲+ می‌شوند؛ پس:

$$۴۷۲ = ۲۳۶ \times (۲+) = ۲۳۶ \times ۲ = ۴۷۲ \quad \text{تعداد پرانتزهای سوم تا آخر} = \left(\frac{۹۹۸ - ۵۸}{۴} \right) + ۱ = ۲۳۶$$

۵۱. گزینه «۴» اگر عدد ۱- به توان عددی زوج برسد، حاصل ۱ و اگر به توان عددی فرد برسد، حاصل ۱- می‌شود. از طرفی می‌توان تعداد همه این عددها را با استفاده از نکته سؤال ۳۷ پیدا کرد:

$$\text{تعداد} = \frac{۸۱۹۲۳ - ۵۰۰۰}{۷۷۷} + ۱ = \frac{۷۶۹۲۳}{۷۷۷} + ۱ = ۹۹ + ۱ = ۱۰۰$$

پس ۵۰ تا از این عددها ۱ و ۵۰ تای دیگر ۱- است؛ در نتیجه حاصل جمع نهایی صفر می‌شود.

۵۲. گزینه «۲» ۳۰۰ عدد صحیح فرد متوالی به صورت زیر است:

$$\underbrace{-۱۹۹, \dots, -۳, -۱}_{\text{اولین صد عدد صحیح فرد منفی}}, \quad \underbrace{-۳۹۹, \dots, -۲۰۳, -۲۰۱}_{\text{دومین صد عدد صحیح فرد منفی}}, \quad \underbrace{-۵۹۹, \dots, -۴۰۳, -۴۰۱}_{\text{سومین صد عدد صحیح فرد منفی}}$$

$$\text{طبق نکته سؤال ۳۷ داریم:} \quad \text{مجموع} = (-۵۹۹) + (-۵۹۷) + \dots + (-۴۰۱) = \left[\frac{(-۴۰۱) - (-۵۹۹)}{۲} + ۱ \right] \left[\frac{(-۵۹۹) + (-۴۰۱)}{۲} \right]$$

$$= \left[\frac{-۴۰۱ + ۵۹۹}{۲} + ۱ \right] \left[\frac{-۱۰۰۰}{۲} \right] = \left(\frac{۱۹۸}{۲} + ۱ \right) (-۵۰۰) = ۱۰۰ \times (-۵۰۰) = -۵۰۰۰۰$$

$$1+2+3+\dots+298+299+300$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید جمع هر جفت از عددها برابر ۳۰۱ می‌شود؛ در نتیجه ۱۵۰ تا ۳۰۱ با هم جمع شده‌اند؛ بنابراین:

$$150 \times 301 = 45150$$

$$46000 - 45150 = 850$$

پس خواسته مسئله برابر است با:

روش دوم:

$$\frac{\text{تعداد} \times (\text{تعداد} + 1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

حاصل جمع عددهای متوالی ۱ تا n را می‌توانیم از رابطهٔ مقابل به دست آوریم:

نکته

$$\frac{150 \times (300+1)}{2} = 150 \times 301 = 45150$$

بنابراین:

$$46000 - 45150 = 850$$

پس:

$$71+72+\dots+199+200$$

تعداد عددها از ۱ تا ۲۰۰ مساوی ۲۰۰ تا است. توجه کنید که در عبارت بالا از ۱ تا ۷۰ را نداریم؛ پس تعداد این عددها برابر با $200 - 70 = 130$ است که جمع هر دو تا از آنها ۲۷۱ شده است؛ در نتیجه مجموع آنها برابر است با:

$$\frac{130}{2} \times 271 = 17615$$

روش دوم: اگر بخواهیم این سؤال را با استفاده از نکتهٔ سؤال قبل حل کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} 1+2+\dots+70 &= \frac{70 \times 71}{2} = 2485 \\ 1+2+\dots+200 &= \frac{200 \times 201}{2} = 20100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20100 - 2485 = 17615$$

$$(-407 - 406 - \dots + 407 + 408) + (2000 + 1999 + \dots - 2000 - 2001) = 408 + (-2001) = -1593$$

۵۵. گزینه «۴»

$$-1593 \div 3 = -531$$

۵۶. گزینه «۳»

برای به دست آوردن حاصل جمع عددهای زوج از ۲ تا $2n$ می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\text{تعداد} \times (\text{تعداد} + 1) = n(n+1)$$

نکته

برای به دست آوردن حاصل عبارت داده شده، ابتدا به کمک نکتهٔ سؤال ۳۷ تعداد آنها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{500-2}{2} + 1 = \frac{498}{2} + 1 = 249 + 1 = 250$$

$$250 \times (250+1) = 250 \times 251 = 62750$$

سپس حاصل جمع عبارت داده شده را طبق نکتهٔ بالا حساب می‌کنیم:

۵۷. گزینه «۴»

برای به دست آوردن حاصل جمع عددهای فرد از ۱ تا $(2n-1)$ می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$n^2 = (\text{تعداد})^2$$

نکته

برای به دست آوردن حاصل عبارت داده شده، ابتدا به کمک نکته سؤال ۳۷ تعداد آنها را به دست می آوریم:

$$n = \frac{999-1}{2} + 1 = \frac{998}{2} + 1 = 499 + 1 = 500$$

$$500^2 = 250000$$

پس مجموع این عددها برابر است با:

$$2+4+\dots+10000 = 500 \times 5001$$

۵۸. گزینه «۲» با توجه به نکته سؤال ۵۶ داریم:

$$1+3+\dots+9999 = 5000^2$$

طبق نکته سؤال ۵۷ داریم:

$$5000 \times 5001 - 5000^2 = 5000 \times (5001 - 5000) = 5000$$

پس:

۵۹. گزینه «۲»

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مجموع مربع عددهای طبیعی برابر است با:

نکته

$$\frac{10 \cdot 11 \cdot (21)}{6} = 10 \times 11 = 210$$

طبق نکته بالا داریم:

۶۰. گزینه «۴»

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

مجموع مکعب عددهای طبیعی برابر است با:

نکته

$$\left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 = 44100$$

طبق نکته بالا داریم:

۶۱. گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A+B+C}{3} = -2 \Rightarrow A+B+C = -6 \\ \frac{B+C}{2} = 2 \Rightarrow B+C = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow A+6 = -6 \Rightarrow A = -6-6 \Rightarrow A = -12$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A+C}{2} = -1 \Rightarrow A+C = -2 \\ A = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow -12+C = -2 \Rightarrow C = -2+12 \Rightarrow C = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} B+C = 6 \\ C = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow B+10 = 6 \Rightarrow B = 6-10 \Rightarrow B = -4$$

$$A - 2B + C = -12 - 2(-4) + 10 = \frac{-12+8+10}{-4} = 6$$

بنابراین:

۶۲. گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A+B}{2} = -5 \Rightarrow A+B = -10 \\ \frac{A+C}{2} = -2 \Rightarrow A+C = -4 \\ \frac{B+C}{2} = -7 \Rightarrow B+C = -14 \end{array} \right\} \Rightarrow A+B+A+C+B+C = (-10) + (-4) + (-14) \Rightarrow 2(A+B+C) = -28$$

$$\frac{A+B}{2} + C = -14 \Rightarrow C = -14 + 10 = -4$$

$$A+C = -4 \Rightarrow A + (-4) = -4 \Rightarrow A = 0$$

$$B+C = -14 \Rightarrow B + (-4) = -14 \Rightarrow B = -14 + 4 = -10$$

$$\Rightarrow 2A - 2B + 4C = 2(0) - 2(-10) + 4(-4) = 0 + 20 - 16 = 4$$

نکته

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ دنباله عددهایی با فاصله یکسان باشد، میانگین این عددها را می‌توان از رابطه‌های زیر به دست آورد:

$$\dots \text{ یا } \frac{x_3 + x_{n-2}}{2} \text{ یا } \frac{x_2 + x_{n-1}}{2} \text{ یا } \frac{x_1 + x_n}{2}$$

با توجه به نکته بالا مشخص است که با حذف کوچک‌ترین (x_1) و بزرگ‌ترین (x_n) عدد، میانگین تغییری نمی‌کند؛ چون $\frac{x_2 + x_{n-1}}{2}$ همان حاصل قبلی را دارد.

۶۴. گزینه «۱»

میانگین عددها در وسط آنها قرار دارد؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} & -7, \dots, 12, 13, 14, \dots, 23 \\ & \frac{13 - (-7)}{2} \quad \frac{13 + 20 = 23}{2} \\ & = 13 + 7 = 20 \end{aligned}$$

$$(20 + 1 + 20 = 41)$$

$$-7, -6, -5, \dots, 13, \dots, 29, 30, 31, 32, 33$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 اولین عدد سومین عدد ۳۹امین عدد ۴۱امین عدد

$$31 - (-5) = 31 + 5 = 36$$

در نتیجه پاسخ سؤال عبارت است از:

۶۵. گزینه «۴»

$$\frac{\text{مجموع } 10 \text{ عدد}}{10} = -18/5 \Rightarrow \text{مجموع } 10 \text{ عدد} = 10 \times (-18/5) = -185$$

$$\text{مجموع جدید } 10 \text{ عدد} = -185 + 5 = -180 \Rightarrow \text{میانگین جدید} = \frac{-180}{10} = -18$$

۶۶. گزینه «۴»

$$\text{مجموع } 51 \text{ عدد صحیح} = \frac{\text{مجموع}}{51} \Rightarrow -12 = \frac{\text{مجموع}}{51} \Rightarrow \text{مجموع} = -12 \times 51 = -612$$

حال عددی را که باید اضافه کنیم، x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{-612 + x}{51 + 1} = -12 \Rightarrow \frac{-612 + x}{52} = -12 \Rightarrow -612 + x = -12 \times 52 \Rightarrow -612 + x = -624 \Rightarrow x = -624 + 612 \Rightarrow x = -12$$

۶۷. گزینه «۲»

$$\frac{-12 + m + (-6) + 5 + n + (-10) + 8}{7} = -9 \Rightarrow -16 + m + n = -63$$

$$\Rightarrow m + n = -63 - (-16) = -63 + 16 = -47$$

۶۸. گزینه «۴»

$$\text{بر } 4 \text{ بخش پذیر نیست. } 96 - 6 = 90 \Rightarrow \text{بر } 4 \text{ بخش پذیر است. } 95 + 1 = 96$$

\downarrow
بار اول

$$\text{بر } 4 \text{ بخش پذیر نیست. } 86 - 6 = 80 \Rightarrow \text{بر } 4 \text{ بخش پذیر است. } 91 + 1 = 92$$

\downarrow \downarrow
بار دوم بار سوم

$$\text{بر } 4 \text{ بخش پذیر نیست. } 82 - 6 = 76 \Rightarrow \text{بر } 4 \text{ بخش پذیر است. } 87 + 1 = 88$$

\downarrow \downarrow
بار چهارم بار پنجم

$$\text{بر } 4 \text{ بخش پذیر نیست. } 78 - 6 = 72 \Rightarrow \text{بر } 4 \text{ بخش پذیر است. } 83 + 1 = 84$$

\downarrow \downarrow
بار ششم بار هفتم

$$78 + 1 = 79$$

\downarrow
بار هشتم

۶۹. گزینه «۱»

$$\frac{x_1 - 5 + x_2 - 6 + x_3 - 7 + \dots + x_{100} - 104}{100} = -3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} - (5 + 6 + 7 + \dots + 104) = -300 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} - (100 \times \frac{5+104}{2}) = -300$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} - 5450 = -300 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} = -300 + 5450 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} = 5150$$

$$\frac{2x_1 - 2 + 2x_2 - 4 + \dots + 2x_{100} - 200}{100} = \frac{2(x_1 + x_2 + \dots + x_{100}) - (100 \times \frac{2+200}{2})}{100} = \frac{2(5150) - 10100}{100}$$

$$= \frac{10300 - 10100}{100} = \frac{200}{100} = 2$$

۷۰. گزینه «۳»

زمان	۲ دقیقه اول	۲ دقیقه دوم	۲ دقیقه سوم	۲ دقیقه چهارم	۲ دقیقه پنجم
طول جهش بر حسب سانتی متر	۵۱۲	۲۵۶	۱۲۸	۶۴	۳۲

زمان	۳ دقیقه اول	۳ دقیقه دوم	۳ دقیقه سوم
مقدار فرورفتن بر حسب سانتی متر	۷۲۹	۲۴۳	۸۱

سانتی متر ۹۹۲ = ۵۱۲ + ۲۵۶ + ۱۲۸ + ۶۴ + ۳۲

ارتفاعی که میمون از درخت بالا رفته برابر است با:

سانتی متر ۱۰۵۳ = ۷۲۹ + ۲۴۳ + ۸۱

عمقی که قورباغه در آب فرورفته برابر است با:

$$\text{متر } \frac{2045}{100} = \text{سانتی متر } 2045 = 992 + 1053 \text{ : فاصله بین میمون و قورباغه}$$

۷۱. گزینه «۴»

به عددهای کسری که صورت و مخرج آنها عددهایی صحیح و مخرجشان مخالف صفر باشد، عددهای گویا می‌گویند. همچنین درباره عددهای اعشاری باید گفت که اگر قسمت اعشاری آنها منظم باشد، آن عدد اعشاری یک عدد گویاست.

نکته

بررسی گزینه‌ها

۱. گزینه ۱: $\pi = 3.141592\dots$ گویا نیست (منظم نیست).

۲. گزینه ۲: گویاست $7 = 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2 = 3 \times 3 + 3 \times \sqrt{2} - 3 \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2 = 7$

۳. گزینه ۳: گویاست $\frac{314}{100} = 3.14$

۷۲. گزینه «۴»

عددهای اعشاری که قسمت اعشاری شان به صورت منظم تکرار می‌شود، دو نوع‌اند:

۱. عددهای اعشاری متناوب ساده: رقم یا ارقام سمت راست ممیز همگی تکرار می‌شوند.

نکته

$$0.\overline{74} = 0.747474\dots$$

مثال:

۲. عددهای اعشاری متناوب مرکب: قسمت اعشاری آنها علاوه بر رقم یا ارقام تکرارشونده (دوره گردش)، رقم یا ارقام غیردوره گردش (ثابت) نیز دارد.

$$\frac{1}{237} = 1/2377777\dots$$

مثال:

بررسی گزینه‌ها

۱. گزینه ۱: گویاست $\frac{52}{221} = 52/2212121\dots$

۲. گزینه ۲: گویاست $-\sqrt{(-7)^2} = -(-7)^1 = -(7)^1 = -7^1$

۳. گزینه ۳: گویاست $\sqrt{0.225} = \sqrt{\frac{225}{10000}} = \frac{15}{100}$

۴. گزینه ۴: گویا نیست $\frac{\sqrt{\pi^4}}{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi$

ابتدا گزاره‌ای را که گویا نیست، پیدا می‌کنیم:

الف: $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ گویاست

ب: $\sqrt{5^2 + 2^5} = \sqrt{25 + 32} = \sqrt{57}$ گویا نیست

پ: $-\frac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}} = -\frac{111}{1111}$ گویاست (۷۱ نکته سؤال ۷۱)

ت: $\sqrt{(-5)^{1000}} = (-5)^{500} = 5^{500}$ گویاست

$$\frac{\sqrt{57}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{57}}{\frac{1}{\sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{57}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{4 \times 57} = \sqrt{228}$$

حال خواسته مسئله را به دست می‌آوریم:

۷۴. گزینه «۲» کل شکل به ۲۵ قسمت مساوی، هر قسمت کوچک به ۴ قسمت مساوی و هر قسمت کوچک‌تر نیز به ۴ قسمت مساوی

تقسیم شده است؛ پس کل شکل به $25 \times 4 \times 4 = 400$ قسمت مساوی تقسیم شده که ۲ تا از آنها رنگی هستند؛ در نتیجه پاسخ مسئله $\frac{2}{400} = \frac{1}{200}$ است.

۷۵. گزینه «۴»

$$\frac{1}{8} \Rightarrow 1+8=9 \Rightarrow 45 \div 9 = 5$$

$$\frac{1 \times 5}{8 \times 5} = \frac{5}{40} \Rightarrow \text{اختلاف صورت و مخرج} = 40 - 5 = 35$$

۷۶. گزینه «۱»

$$\frac{-(-(\dots(-(-4 \frac{3}{11}))\dots))}{624137} = 4 \frac{3}{11} = \frac{47}{11} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{-47}{11} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{-11}{47}$$

$$\frac{66 \div 11}{77 \div 11} = \frac{6 \times 11}{7 \times 11} = \frac{6}{7}$$

۷۷. گزینه «۲»

۷۸. گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{3} \text{ قرینه } m \text{ نسبت به } \frac{-1}{3} &= -\frac{1}{3} \times 2 - m \\ \frac{2}{5} \text{ قرینه } 2m \text{ نسبت به } \frac{2}{5} &= \frac{2}{5} \times 2 - 2m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{3} - m = \frac{4}{5} - 2m \Rightarrow 2m - m = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \Rightarrow 2m = \frac{22}{15} \Rightarrow m = \frac{11}{15}$$

$$\frac{m-1}{m} = \frac{\frac{11}{15}-1}{\frac{11}{15}} = \frac{\frac{-4}{15}}{\frac{11}{15}} = \frac{-4}{11}$$

۷۹. گزینه «۱»

گزینه ۱: $1 - \frac{m}{n} < -1 + \frac{m}{n} \Rightarrow -\frac{m}{n} - \frac{m}{n} < -1 - 1 \Rightarrow \frac{-2m}{n} < -2 \Rightarrow \frac{m}{n} > 1$

گزینه ۲: $\frac{m}{n} < \frac{n}{m} + \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{2n}{m}$ ✓ (در نتیجه $\frac{2n}{m} > 1$ پس $\frac{n}{m} > 1$ ، چون $\frac{m}{n} < 1$)

گزینه ۳: $\frac{n}{m} + \frac{n}{m} > 1 + 1 \Rightarrow \frac{2n}{m} > 2 \xrightarrow{\div 2} \frac{n}{m} > 1$ ✓

۸۰. گزینه «۴» هیچ‌کدام همواره درست نیست.

برای گزاره‌های (پ) و (ت) می‌توان مثال‌های زیر را ارائه کرد:

پ: $\frac{3}{4} \xrightarrow{n=1} \frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5} \times (\frac{3}{4} < \frac{4}{5})$ (زیرا)

ت: $\frac{7}{5} \xrightarrow{n=1} \frac{7+1}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \times (\frac{7}{5} > \frac{4}{3})$ (زیرا)

۸۱. گزینه «۲» هر واحد کامل $\frac{1}{40}$ است که هر واحد نیز به ۳ قسمت تقسیم شده؛ پس هر واحد کوچک برابر است با: $\frac{1}{40} = \frac{1}{120}$

$$\left. \begin{aligned} \text{حرکت اول} &= \frac{1}{120} \times 8 = \frac{1}{15} \\ \text{حرکت دوم} &= \frac{1}{120} \times (-12) = \frac{-1}{10} \\ \text{حرکت دوم انتهای} &= \frac{1}{120} \times (-4) = \frac{-1}{30} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{15} + \frac{-1}{10} = \frac{-1}{30}$$

۸۲. گزینه «۳» هر واحد کامل $\frac{7}{13}$ است که هر واحد نیز به ۲ قسمت تقسیم شده؛ پس هر واحد کوچک برابر است با: $\frac{7}{13} = \frac{7}{26}$

$$\left. \begin{aligned} \text{حرکت اول} &= \frac{7}{26} \times 9 = \frac{63}{26} \\ \text{حرکت دوم} &= \frac{7}{26} \times \left(\frac{-7}{13}\right) = \frac{-49}{13} \\ \text{حرکت سوم} &= \frac{7}{26} \times 9 = \frac{63}{26} \\ \text{حرکت چهارم} &= \frac{7}{26} \times 1 = \frac{7}{26} \\ \text{حرکت چهارم انتهای} &= \frac{7}{26} \times \left(\frac{7}{13}\right) = \frac{49}{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{63}{26} + \frac{-49}{13} + \frac{63}{26} + \frac{7}{26} = \frac{49}{13}$$

۸۳. گزینه «۳»
$$\left. \begin{aligned} -1\frac{1}{4} &= -\frac{5}{4} = -\frac{15}{12} \\ \frac{2}{3} &= \frac{8}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{8}{12} + \frac{-15}{12} = \frac{-7}{12} \Rightarrow \frac{-7}{12} - \left(\frac{-15}{12}\right) = \frac{8}{12}$$

 رابطه جمع برداری رابطه تفریق برداری

۸۴. گزینه «۴» هر واحد کامل $\frac{-5}{17}$ را نشان می‌دهد که به ۴ قسمت تقسیم شده؛ پس هر واحد کوچک برابر است با: $\frac{-5}{17} = \frac{-5}{68}$

هر حرکت نیز برابر است با: $\frac{-5}{68} \times 5 = \frac{-25}{68}$
 که محور شامل ۴ حرکت $\frac{-25}{68}$ است؛ پس: $\frac{-25}{68} \times 4 = \frac{-25}{17}$

۸۵. گزینه «۳» در این محور هر دو واحد کامل $-\frac{3}{11}$ است؛ بنابراین هر واحد کامل برابر است با: $-\frac{3}{11} = -\frac{3}{22}$

$$-\frac{3}{11} = -\frac{3}{22}$$

A نقطه: $\frac{+3}{22} \times 2 = \frac{+3}{11} \times 2 = \frac{+3}{5.5}$

B نقطه: $\frac{-3}{22} \times 11 = \frac{-3}{2} \times 11 = \frac{-33}{2}$

C نقطه: $\frac{+3}{22} \times 5 = \frac{+3}{4.4} \times 5 = \frac{+15}{4.4} = \frac{5}{2.2}$

D نقطه: $\frac{-3}{22} \times 1 = \frac{-3}{22}$

$$-\frac{A}{3} - 2B + \frac{C}{2} - D = -\frac{3}{3} - 2\left(\frac{-33}{2}\right) + \frac{5}{2} - \frac{-3}{22} = \frac{-3}{3} + \frac{33}{1} + \frac{5}{2} + \frac{3}{22} = \frac{-1}{3} + \frac{33}{1} + \frac{5}{2} + \frac{3}{22} = \frac{-1}{3} + \frac{33}{1} + \frac{5}{2} + \frac{3}{22} = \frac{-1}{3} + \frac{33}{1} + \frac{5}{2} + \frac{3}{22} = \frac{-4 + 165 + 40}{220} = \frac{201}{220}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{-5}{6} = \frac{-20}{24} \\ B &= \frac{1}{8} = \frac{3}{24} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - B = \frac{3}{24} - \left(-\frac{20}{24}\right) = \frac{3+20}{24} = \frac{23}{24}$$

اندازه هر قسمت روی محور $= \frac{23}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{23}{96}$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{-20}{24} + \frac{23}{96} = \frac{-80+23}{96} = \frac{-57}{96} \\ D &= \frac{-20}{24} + 3 \times \frac{23}{96} = \frac{-20}{24} + \frac{69}{96} = \frac{-80+69}{96} = \frac{-11}{96} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D - E = \frac{-11}{96} - \left(-\frac{57}{96}\right) = \frac{-11+57}{96} = \frac{46}{96} = \frac{23}{48}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} &= \frac{28}{70} \\ \frac{1}{7} &= \frac{10}{70} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{فاصله بین هر دو نقطه} = \frac{28-10}{70} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} m &= \frac{16}{70} \\ n &= \frac{20}{70} \\ e &= \frac{22}{70} \\ f &= \frac{26}{70} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{mn}{e+f} = \frac{\frac{16}{70} \times \frac{20}{70}}{\frac{22}{70} + \frac{26}{70}} = \frac{\frac{8}{35} \times \frac{2}{7}}{\frac{48}{70}} = \frac{8 \times 2 \times 70}{35 \times 7 \times 48} = \frac{22}{242}$$

گزینه ۱: بین ۰ و ۱- قرار دارد $-\frac{1}{1701}$

گزینه ۲: بین ۰ و ۱ قرار دارد $1 - \frac{1}{1701} = \frac{1701-1}{1701} = \frac{1700}{1701}$

گزینه ۳: $-\frac{1}{1701} = -\frac{1}{1701}$ قرار دارد -1702 و -1700 بین

گزینه ۴: $\frac{1}{1-1/1701} = \frac{1}{1701-1} = \frac{1}{1700} = \frac{1701}{1700}$ قرار دارد $\frac{1}{1700}$

- اگر به صورت و مخرج یک کسر بزرگ‌تر از واحد، ۱ واحد اضافه کنیم، کسر کوچک‌تر می‌شود.
- اگر از صورت و مخرج یک کسر بزرگ‌تر از واحد، ۱ واحد کم کنیم، کسر بزرگ‌تر می‌شود.

نکته

۹۰. گزینه «۲» اگر از قسمت صحیح هر سه عدد صرف نظر کنیم، به کسرهایی با صورت ۱ می‌رسیم که مخرج A از مخرج B و C کوچک‌تر، در نتیجه A از همه بزرگ‌تر است. بین B و C، مخرج B بزرگ‌تر از مخرج C و در نتیجه C از B بزرگ‌تر است؛ پس:

$$A > C > B$$

گزینه ۱: $(-0/125)^2 = \left(-\frac{125}{1000}\right)^2 = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$

گزینه ۲: $(-0/25)^4 = \left(-\frac{25}{100}\right)^4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

گزینه ۳: $(-0/5)^7 = \left(-\frac{5}{10}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}$

گزینه ۴: $(-0/75)^2 = \left(-\frac{75}{100}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

در بین عددهای منفی هر کدام به صفر نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است؛ بنابراین $-\frac{1}{512}$ از $-\frac{1}{128}$ بزرگ‌تر است. محل تقریبی این عددها روی محور به صورت مقابل است:



نکته اگر $a > b > c > d > 0$ ، آنگاه: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{151}{150} < \frac{149}{148} < \frac{148}{147} < \frac{147}{146}$$

۹۳. گزینه «۲» بعد از به دست آوردن حاصل هر عبارت، آنها را هم مخرج می‌کنیم:

گزینه ۱: $\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{49}{105}$

گزینه ۲: $\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{15}{7}} = \frac{7}{105}$

گزینه ۳: $\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{5}{21}} = \frac{21}{5} = \frac{441}{105}$

گزینه ۴: $\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{35}{7}} = \frac{7}{35} = \frac{9}{105}$

$$\frac{1}{105} < \frac{9}{105} < \frac{49}{105} < \frac{441}{105}$$

بنابراین:

$$k=0 \Rightarrow A=1$$

۹۴. گزینه «۲» با چند مثال ساده می‌توانیم پاسخ این سؤال را به دست آوریم:

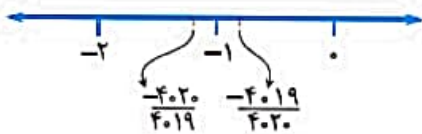
$$k=1 \Rightarrow A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k=2 \Rightarrow A = \frac{2}{7}$$

$$k=3 \Rightarrow A = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار k ، کسر کوچک و کوچک‌تر می‌شود. با توجه به عددهای به دست آمده، گزینه‌های ۳ و ۴ رد می‌شوند. بین گزینه‌های ۱ و ۲، گزینه ۲ درست است، چون در k های خیلی بزرگ، عدد $+1$ در صورت و مخرج بی‌تأثیر است و مخرج تقریباً ۳ برابر صورت می‌شود؛ پس کسر مورد نظر در نهایت به $\frac{1}{3}$ نزدیک می‌شود.

۹۵. گزینه «۳»



۹۶. گزینه «۴» با در نظر گرفتن $n = -1$ و $m = -3$ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{-1} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3} > 0 \times$ (زیرا $-\frac{2}{3} < 0$)

بررسی گزینه‌ها

گزینه ۲: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \frac{1}{-3} + \frac{1}{-1} = \frac{-1-3}{3} = -\frac{4}{3} > 0 \times$ (زیرا $-\frac{4}{3} < 0$)

گزینه ۳: $\frac{1}{m} > -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{-3} > \frac{-1}{-1} \Rightarrow \frac{1}{-3} > 1 \times$ (زیرا $-\frac{1}{3} < 1$)

گزینه ۴: $-m > -n \Rightarrow -(-3) > -(-1) \Rightarrow 3 > 1 \checkmark$

۹۷. گزینه «۱»

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}, \frac{1}{2} = \frac{12}{24} \Rightarrow \frac{8}{24} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{11}{24} < \frac{12}{24}$$

فاصله میانگین دو عدد از آن دو عدد به یک اندازه است.

نکته

$$\frac{-\frac{4}{9} + \frac{3}{7}}{2} = \frac{-28+27}{63} = \frac{-1}{126}$$

پس با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{c}{d} < \frac{c+a}{d+b} < \frac{a}{b}$$

اگر $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ کسر $\frac{c+a}{d+b}$ بین این دو عدد قرار دارد؛ یعنی:

نکته

$$\frac{4}{13} < \frac{4+3}{13+4} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{13} < \frac{7}{17} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{13} < \frac{7 \times 5}{17 \times 5} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{13} < \frac{35}{85} < \frac{3}{4}$$

$$M = \frac{-2/7 + (-1/4)}{2} = \frac{-4/1}{2} = -2/0.5$$

$$N = \frac{-1/4 + (1/1)}{2} = \frac{-0/2}{2} = -0/15$$

$$\overline{MN} = -0/15 - (-2/0.5) = -0/15 + 2/0.5 = 1/9$$

۱۰۱. گزینه «۲» برای مثال می‌توانیم فرض کنیم $a=15, b=20, c=3, d=4$

بررسی گزینه‌ها

گزینه ۱: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow 15 \times 4 = 20 \times 3 \times$

گزینه ۲: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{15}{15+20} = \frac{3}{3+4} \Rightarrow \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \checkmark$

گزینه ۳: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{15-4}{20} = \frac{3-20}{4} \Rightarrow \frac{11}{20} = \frac{-17}{4} \times$

گزینه ۴: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{15 \times 4}{20} = \frac{3 \times 20}{4} \Rightarrow \frac{60}{20} = \frac{60}{4} \times$

۱۰۲. گزینه «۴» اگر در صورت این کسراز -500 فاکتور بگیریم، داریم:

$$\frac{-500 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000} \right)}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000} \right)} \times (-2) = 1000 \Rightarrow 1000 - 500 = 500$$

۱۰۳. گزینه «۳» ابتدا حاصل عبارت داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{14+3}{60} \times (-3)}{\frac{25-9}{210}} = \frac{\frac{17}{16} \times (-3)}{\frac{210 \times 17}{60 \times 16}} \times (-3) = -\frac{21 \times 17}{2 \times 16}$$

سپس حاصل را بر $-0/2$ تقسیم می‌کنیم:

$$-\frac{21 \times 17}{2 \times 16} \div (-0/2) = -\frac{21 \times 17}{2 \times 16} \div \frac{-2}{10} = -\frac{21 \times 17}{2 \times 16} \times \frac{-10}{2} = +\frac{1785}{32} = 55 \frac{25}{32}$$

$$\left. \begin{aligned} 2A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \\ A &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} 4B &= 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots \\ B &= \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

۱۰۶. گزینه «۲» روش اول: راهبرد حل مسئله ساده‌تر:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

⋮

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

نتیجه می‌گیریم که صورت یک واحد از مخرج کوچک‌تر است؛ پس:

روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} 2S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512} \\ S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} 2S - S = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024} \Rightarrow S = \frac{1023}{1024}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

از دو روش بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

نکته

۱۰۷. گزینه «۱» با توجه به نکته سؤال قبل و سمت راست تساوی داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \frac{1}{E} &= \frac{31}{32} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} &= \frac{2^5 - 1}{2^5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A=2, B=4, C=8, D=16, E=32$$

$$\Rightarrow A^2 - B^2 + C^2 - D + E = 4 - 16 + 64 - 16 + 32 = 68$$

$$\frac{4}{8} \times \frac{8}{4} \times \frac{4}{8} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{4}{n}$$

۱۰۸. گزینه «۳»

$$A = \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \left(\frac{n+3}{n+2}\right) \dots \left(\frac{n+61}{n+60}\right) = \frac{n+61}{n} = 1 + \frac{61}{n}$$

۱۰۹. گزینه «۲»

$$(106 - 7) + 1 = 100$$

۱۱۰. گزینه «۴» تعداد عددها از ۷ تا ۱۰۶ برابر است با:

اگر جمله‌ها را بدون در نظر گرفتن پرانتز بنویسیم و آنها را به صورت زیر مرتب کنیم، داریم:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{101}{106} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{5}{106} = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{101}{106} + \frac{5}{106}$$

$$100 \times 1 = 100$$

چون مجموع هر دو کسراز دو پرانتز ۱ می‌شود، پس ۱۰۰ تا یک داریم؛ بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$B = \frac{1}{20 \times 21} \times \frac{1}{22 \times 23} \times \dots \times \frac{1}{99 \times 100} = \frac{1}{20 \times 21} \times \frac{21 \times 22}{22 \times 23} \times \frac{23 \times 24}{24 \times 25} \times \dots \times \frac{99 \times 100}{100 \times 101} = \frac{101}{20}$$

۱۱۱. گزینه «۳»

$$\Rightarrow 20 \cdot B = 20 \cdot \left(\frac{101}{20}\right) = 101$$

(نکته مربوط به این سؤال را در بخش کسره‌های تلسکوپی می‌خوانید.)

۱۱۲. گزینه «۲»

$$M = (1 + 2 + \dots + n) + \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{10}\right) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{10} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{20} = \frac{10[n(n+1)] + n(n+1)}{20} = \frac{11[n(n+1)]}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{10M}{11} = \frac{10}{11} M = \frac{10}{11} \times \frac{11}{20} [n(n+1)] = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$$

۱۱۳. گزینه «۴» حاصل هر پیرانتز را به دست می آوریم:

$$F = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + \frac{n-1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{n-1}{2} = (n-1) \left(\frac{n-1+1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = (n-1) \frac{n}{4} = \frac{n(n-1)}{4} \Rightarrow 4F = n(n-1)$$

تعداد میانگین

۱۱۴. گزینه «۲»

$$\frac{g-k}{2k+g} = -\frac{8}{1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} g-k = -16k-8g \xrightarrow{\text{جابجایی جملات}} 16k-k = -8g-g \xrightarrow{\text{ساده کردن جملات}} 15k = -9g$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -9k} \frac{15k}{-9k} = \frac{-9g}{-9k} \xrightarrow{\text{ساده کردن}} \frac{5}{-3} = \frac{g}{k}$$

۱۱۵. گزینه «۲»

$$\left(\frac{1}{3}\right) * (\text{معکوس } 3) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{1-\frac{3}{6}} = \frac{2}{\frac{6-3}{6}} = \frac{2}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

۱۱۶. گزینه «۳» سه تساوی را مساوی با یک متغیر ثابت مثل t قرار می دهیم:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{11} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} = t \Rightarrow a = 5t \\ \frac{b}{7} = t \Rightarrow b = 7t \\ \frac{c}{11} = t \Rightarrow c = 11t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{(a+b-c)^2} = \frac{(5t)(7t)(11t)}{(5t+7t-11t)^2} = \frac{5 \times 7 \times 11 \times t^3}{t^2} = 5 \times 7 \times 11$$

۱۱۷. گزینه «۳» با کمی دقت در جدول متوجه می شویم که عدد هر خانه از حاصل جمع دو خانه پایینی اش به دست می آید؛ یعنی:

$$-\frac{1}{80} + \frac{1}{56} = \frac{-7+10}{560} = \frac{3}{560}$$

$$\frac{1}{100} + A = -\frac{1}{80} \Rightarrow A = -\frac{1}{80} - \frac{1}{100} = \frac{-5-4}{400} = \frac{-9}{400}$$

$$-\frac{9}{400} + D = \frac{1}{56} \Rightarrow D = \frac{1}{56} + \frac{9}{400} = \frac{50+63}{2800} = \frac{113}{2800}$$

$$B + \frac{1}{60} = \frac{1}{100} \Rightarrow B = \frac{1}{100} - \frac{1}{60} = \frac{3-5}{300} = -\frac{2}{300} = -\frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{60} + E = -\frac{9}{400} \Rightarrow E = -\frac{9}{400} - \frac{1}{60} = \frac{-27-20}{1200} = \frac{-47}{1200}$$

$$\frac{-47}{1200} + C = \frac{113}{2800} \Rightarrow C = \frac{113}{2800} + \frac{47}{1200} \Rightarrow C = \frac{329+329}{8400} = \frac{658}{8400} = \frac{167}{2100}$$

۱۱۸. گزینه «۲»

$$-\frac{7}{3} - \frac{13}{4} \times \frac{6}{5} \div \frac{5}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{7}{3} - \frac{13}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{5} - \frac{5}{4} = -\frac{7}{3} - \frac{29}{25} - \frac{5}{4} = \frac{-700-468-375}{300} = \frac{-1543}{300} \Rightarrow 300 \times \frac{-1543}{300} = -1543$$

۱۱۹. گزینه «۴»

$$\frac{3017(-3018+3019)}{3017} = \frac{3017}{3017} = 1 \Rightarrow 1 \div 200 = \frac{1}{200}$$