۶۴. گزینهٔ «۳»

$$(4x-1)+(2(x+1))+(3x-2)=4x-1+2x+2+3x-1=9x-1$$

۶۵. گزینهٔ «۳»

$$-\frac{4}{3}(9x^2-6y)-2(3y-y^2)-(x^2-y^2)+2(-y-x)=-12x^2+8y-6y+2y^2-x^2+y^2-2y-2x=-13x^2+3y^2-2x$$

۶۶. گزینهٔ «۲»

$$2(-0/5a-4)-\frac{1}{7}(21-14a)=-a-8-3+2a=a-11$$

۶۷. گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{array}{l}A=1-x-y\\ B=2x+y\\ C=7\end{array}\right\}\Rightarrow -C\times(A-2B)=-7\times(1-x-y-2(2x+y))=-7\times(1-x-y-4x-2y)$$

$$=-7\times(-5x-3y+1)=+35x+21y-7$$

۶۸. گزینهٔ «۳» همان‌طور که می‌دانید، ترتیب اولویت به این صورت است که ابتدا پرانتز، بعد ضرب یا تقسیم (هر کدام طرف چپ بودند)، سپس جمع یا تفریق انجام می‌شود؛ پس:

$$-3a\times3-4\div2-7a\times-5-12a\div-6-a=(-9a)+(-2)+(+35a)+(+2a)-a=-9a-2+35a+2a-a=27a-2$$

۶۹. گزینهٔ «۴»

$$-4x(x-1)+2y(3-y)-6(x-y)=-4x^2+4x+6y-2y^2-6x+6y=-4x^2-2y^2-2x+12y$$

۷۰. گزینهٔ «۱» از عامل مشترک بین دو عبارت فاکتور می‌گیریم؛ این عمل که یک عبارت جبری را به‌صورت ضرب دو عبارت جبری بیان می‌کند، فاکتورگیری است:

$$-4ab\left(\frac{1}{a}-\frac{3}{b}\right)-\frac{3}{ab}\left(-2a^2b-\frac{4}{6}b^2a\right)=-4b+12a+6a+2b=-2b+18a=2(9a-b)$$

۷۱. گزینهٔ «۲»

$$-2a^2b(-2b+a)+3ba^2\left(\frac{1}{3}b-4a\right)=+4a^2b^2-2a^3b+b^2a^2-12a^3b=5a^2b^2-14a^3b=a^2b(5b-14a)$$

و باز هم فاکتورگیری!

۷۲. گزینهٔ «۱»

$$-(-x-2y-3z)+2(z+2x+3y)-4(y-2z-3x)=+x+2y+3z+2z+4x+6y-4y+8z+12x=17x+4y+13z$$

۷۳. گزینهٔ «۳»

$$+\frac{8}{5}a+\frac{16}{5}b+12-12+\frac{b}{4}-\frac{3a}{4}=\left(\frac{8}{5}a-\frac{3a}{4}\right)+\left(\frac{16b}{5}+\frac{b}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{32a-15a}{20}\right)+\left(\frac{64b+5b}{20}\right)=\frac{17a}{20}+\frac{69b}{20}=\frac{17a+69b}{20}$$

۷۴. گزینهٔ «۴»

$$-3axy-2a(x-2y)+3x(y-2a)-4y(a-2x)$$

$$=-3axy-2ax+4ay+3xy-6ax-4ay+8yx=-3axy-8ax+11xy$$

۷۵. گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{3x-2x}{6}=\dfrac{x}{6}\\[2ex] -4\left(\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x}{5}\right)=-4\times\left(\dfrac{15x+4x}{20}\right)=-4\times\dfrac{19x}{20}=-\dfrac{19x}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\frac{x}{6}}{-\frac{19x}{5}}=\frac{-5}{114}$$

۷۶. گزینهٔ «۲»

$$-4(1-x+3(2(4-x(y+3))))=-4(1-x+3(2(4-xy-3x)))=-4(1-x+3(8-2xy-6x))$$

$$=-4(1-x+24-6xy-18x)=-4(25-19x-6xy)=-100+76x+24xy$$

۷۷. گزینهٔ «۳»

$$۵(-\frac{۴}{۳}x-y)-\frac{۷}{۵}(-\frac{۴}{۳}x-y)+\frac{۹}{۳}(-\frac{۴x}{۳}-y)-\frac{۱}{۱۰}(\frac{-۴x}{۳}-y)=-\frac{۲۰x}{۳}-۵y+\frac{۲۸}{۱۵}x+\frac{۷y}{۵}-\frac{۳۶x}{۹}-\frac{۹}{۳}y+\frac{۴x}{۳۰}+\frac{y}{۱۰}$$

$$=(-\frac{۲۰x}{۳}+\frac{۲۸}{۱۵}x-۴x+\frac{۲x}{۱۵})+(-۵y+\frac{۷y}{۵}-۳y+\frac{y}{۱۰})=(-\frac{۲۰x}{۳}-۲x)+(-۸y+\frac{۷y}{۵}+\frac{y}{۱۰})$$

$$=(-\frac{۲۶x}{۳})+(-۸y+\frac{۱۵y}{۱۰})=(-\frac{۲۶x}{۳})+(-۸y+\frac{۳y}{۲})=(-\frac{۲۶x}{۳})-(\frac{۱۳y}{۲})=-\frac{۱۳}{۲}(\frac{۴}{۳}x+y)$$

۷۸. گزینهٔ «۴»

$$A-۲A+۳A-۴A+۵A-۶A=-۳A\xlongequal{A=x+y}-۳(x+y)$$

۷۹. گزینهٔ «۱»

$$a-(b-(c-(a-(b-c))))=a-(b-(c-(a-b+c)))$$

$$=a-(b-(c-a+b-c))=a-(b+a-b)=a-a=۰$$

۸۰. گزینهٔ «۳»

$$-\frac{a}{۲}(b-۳a)+۳a(-\frac{b}{۳}+\frac{a}{۲})=-\frac{ab}{۲}+\frac{۳a^۲}{۲}-ab+\frac{۳a^۲}{۲}=۳a^۲-۱/۵ab$$

۸۱. گزینهٔ «۳» در سؤال‌هایی که می‌خواهند یک عبارت جبری را به‌صورت ضرب دو عبارت جبری دیگر بنویسیم، در حقیقت همان فاکتورگیری را می‌خواهند. برای فاکتورگیری باید عوامل مشترک بین این عبارت‌ها را پیدا کنیم و به اصطلاح، آنها را از داخل عبارت‌ها بیرون بکشیم.

در این سؤال، عامل مشترک بین ضرایب عددی (یعنی ۶− و ۹−)، ۳ یا ۳− است (یعنی هر دو بر ۳ یا ۳− بخش‌پذیرند) که با توجه به مسئله از ۳− فاکتور می‌گیریم و عامل مشترک بین متغیّرهای عبارت‌های جبری ($a^۲b$ و $b^۲a$) ab است؛ زیرا هر جمله حداقل یک a و یک b دارد؛ پس عامل فاکتور ab۳− است:

$$-۶a^۲b-۹b^۲a=-۳ab(۲a+۳b)$$

۸۲. گزینهٔ «۲» عامل مشترک بین ضرایب عددی، ۲ است (همهٔ عوامل بر ۲ بخش‌پذیرند) و متغیّرها عامل مشترک ندارد؛ پس:

$$-۱۲xy+۱۸y-۲۰x=۲(-۶xy+۹y-۱۰x)$$

۸۳. گزینهٔ «۱»

$$\frac{۱}{۳}(۴a-۸b)=\frac{۴a}{۳}-\frac{۸b}{۳}\qquad\qquad \frac{۲}{۳}(۲a-۴b)=\frac{۴a}{۳}-\frac{۸b}{۳}$$

همان‌طور که می‌بینید، هر دو عبارت با هم برابرند؛ پس میانگین برابر با یکی از آنها می‌شود:

$$\text{میانگین}=\frac{۴a}{۳}-\frac{۸b}{۳}$$

۸۴. گزینهٔ «۲»

$$۴ad+۴ac-bc-bd=\underset{\text{عامل فاکتور}}{۴a}(d+c)-\underset{\text{عامل فاکتور}}{b}(c+d)$$

حال می‌بینید در این دو عبارت نیز $c+d$ برابر و یکسان است؛ پس پاسخ برابر است با:

$$(c+d)(۴a-b)$$

۸۵. گزینهٔ «۲» ضرایب عددی عبارت بر ۵ بخش‌پذیرند و متغیّرها نیز عامل $ay^۲$ دارند (که در این سؤال داده شده و خواستهٔ مسئله، پرانتز دوم است)؛ پس:

$$-۱۵a^۳y^۲+۲۵y^۲a-۳۰a^۲y^۲=-۵ay^۲(۳a^۲-۵+۶a)$$

۸۶. گزینهٔ «۳» از عامل $a-b$ فاکتور می‌گیریم:

$$a(a-b)-b(a-b)-(a-b)(a-b)=(a-b)(a-b-(a-b))=\underbrace{(a-b)}_{۴}(\underbrace{(a-b)}_{۴}-\underbrace{(a-b)}_{۴})\Rightarrow ۴\times(۴-۴)=۰$$

۸۷. گزینهٔ «۲»

$$-۸a^۴b^۳c+۲a^۳bc^۲-۱۶b^۳ca^۲=(-۲a^۲b^۲+۵ac-۴b^۲)(\qquad)$$

باید ببینیم چه عبارتی در پرانتز اوّل ضرب شود تا عبارت اصلی ساخته شود؛ برای نمونه:

$$-۲a^۲b^۲\times(\qquad)=-۸a^۴b^۳c$$

باید ۲− در ۴ ضرب شود تا ۸− به‌دست آید؛ پس ضریب عددی آن ۴ است. در ضمن دو a، یک c و یک b کم دارد؛ پس:

$$-۲a^۲b^۲\times(۴a^۲bc)=-۸a^۴b^۳c$$

بنابراین عامل دیگر، $۴a^۲bc$ است.

۸۸. گزینهٔ «۱»

$$a(x+y-z)+b(z-x-y)+c(x-z+y)=a(x+y-z)-b(x+y-z)+c(x+y-z)$$

عامل فاکتور: $(x+y-z)\Rightarrow(x+y-z)(a-b+c)$

۸۹. گزینهٔ «۵»

$$x\ ,\ y\ ,\ x+y\ ,\ x+۲y\ ,\ \underbrace{۲x+۳y}_{۲x+۳y=۷}\ ,\ ۳x+۵y$$

همهٔ جمله‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(x)+(y)+(x+y)+(x+۲y)+(۲x+۳y)+(۳x+۵y)=۸x+۱۲y$$

$$\underbrace{۴}_{\text{عامل فاکتور}}(۲x+۳y)\xrightarrow{۲x+۳y=۷}۴\times۷=۲۸$$

۹۰. گزینهٔ «۳»

$$\frac{۴x-۵y+z}{۸x-۱۰y+۲z}\times\frac{a^۲-b^۲}{۳b^۲-۳a^۲}=\frac{۴x-۵y+z}{۲(۴x-۵y+z)}\times\frac{a^۲-b^۲}{-۳(a^۲-b^۲)}=\frac{۱}{۲}\times\frac{-۱}{۳}=\frac{-۱}{۶}$$

۹۱. گزینهٔ «۱» مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{-۵}{۳}x-\frac{۲x+۴}{۵}-\frac{۱}{۳}=\frac{-۲۵x-۳(۲x+۴)-۵}{۱۵}=\frac{-۲۵x-۶x-۱۲-۵}{۱۵}=\frac{-۳۱x-۱۷}{۱۵}$$

۹۲. گزینهٔ «۲»

$$\underbrace{۱-\frac{y}{۴}-\frac{-۳x+y-۱}{۲}+\frac{x}{۲}}_{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}}\underbrace{-\frac{۳}{۲}\times\frac{y-x}{۴}}_{\frac{-۳(y-x)}{۸}}=\frac{۴-y-۲(-۳x+y-۱)+۲x}{۴}-\frac{۳(y-x)}{۸}$$

$$=\frac{۴-y+۶x-۲y+۲+۲x}{۴}-\frac{۳y-۳x}{۸}=\frac{۶-۳y+۸x}{۴}-\frac{۳y-۳x}{۸}=\frac{۱۲-۶y+۱۶x-(۳y-۳x)}{۸}$$

$$=\frac{۱۲-۶y+۱۶x-۳y+۳x}{۸}=\frac{۱۲-۹y+۱۹x}{۸}=\frac{۱۲}{۸}-\frac{۹y}{۸}+\frac{۱۹x}{۸}=\frac{۳}{۲}-\frac{۹y}{۸}+\frac{۱۹x}{۸}$$

۹۳. گزینهٔ «۱»

$$(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۴})\cdots(۱-\frac{۱}{n})=\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancel{۲}}{\cancel{۳}}\times\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۴}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-۱}}{n}=\frac{۱}{n}$$

صورت اوّلی و مخرج آخری باقی می‌ماند و بقیه با هم ساده می‌شود.

۹۴. گزینهٔ «۳» به کسرهایی که مخرج آنها ضرب دو عبارت و صورتشان تفاضل آنهاست، کسرهای تلسکوپی می‌گویند.

$$\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{(n+۱)-n}{n\times(n+۱)}=\frac{n+۱-n}{n\times(n+۱)}=\frac{۱}{n\times(n+۱)}=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}$$

$$\Rightarrow(\frac{۱}{n}-\cancel{\frac{۱}{n+۱}})+(\cancel{\frac{۱}{n+۱}}-\cancel{\frac{۱}{n+۲}})+(\cancel{\frac{۱}{n+۲}}-\cancel{\frac{۱}{n+۳}})+\ldots+(\cancel{\frac{۱}{۲n}}-\frac{۱}{۲n+۱})=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{۲n+۱}$$

۹۵. گزینهٔ «۴» در این سؤال نیز کسرهای تلسکوپی داده شده است با این تفاوت که تفاضل دو جملهٔ مخرج‌ها در این سؤال برابر با ۲ است؛ اما در صورت همهٔ کسرها ۱ مشاهده می‌شود. برای رفع این مسئله ابتدا در صورت همهٔ کسرها ۲ قرار می‌دهیم؛ سپس $\frac{۱}{۲}$ را در کلّ عبارت ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\left[\frac{۲}{n\times(n+۲)}+\frac{۲}{(n+۲)(n+۴)}+\frac{۲}{(n+۴)(n+۶)}+\ldots+\frac{۲}{(۲n)(۲n+۲)}\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۲})+(\frac{۱}{n+۲}-\frac{۱}{n+۴})+(\frac{۱}{n+۴}-\frac{۱}{n+۶})+\ldots+(\frac{۱}{۲n}-\frac{۱}{۲n+۲})\right]=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{n}-\frac{۱}{۲n+۲}\right]$$

۹۶. گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{aligned}\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}&=\frac{b-a}{ab}\\ \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}&=\frac{b+a}{ab}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\frac{b-a}{\cancel{ab}}}{\frac{b+a}{\cancel{ab}}}=\frac{b-a}{b+a}$$

۹۷. گزینهٔ «۴»

$$b=\frac{۱}{a}\Rightarrow ab=۱\qquad\qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^۲+b^۲}{\underbrace{ab}_{۱}}=\frac{a^۲+b^۲}{۱}=a^۲+b^۲$$

۹۸. گزینهٔ «۱» در یکی از این جمله‌ها، پرانتز $(n-n)$ ظاهر می‌شود که برابر با صفر است و صفر ضرب در هر عددی، صفر می‌شود.

۹۹. گزینهٔ «۲» چون x و y معکوس یکدیگرند، $x=\frac{۱}{y}$؛ پس به جای x، عبارت $\frac{۱}{y}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^۲y-y^۲x=\frac{۱}{\cancel{y}}x\cancel{y}-y^{\cancel{۲}}\frac{۱}{\cancel{y}}=x-y$$

۱۰۰. گزینهٔ «۲» برای حل این سؤال از طرفین وسطین استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳x+۳y=۲x-۲y\Rightarrow x=-۵y\Rightarrow\frac{x}{y}=-۵$$

۱۰۱. گزینهٔ «۴» برای ضرب دو عبارت جبری در یکدیگر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(a-b)(a+b)=a^۲+ab-ba-b^۲=a^۲-b^۲$$

به این عبارت، اتحاد مزدوج می‌گویند که در سال بعد با آن آشنا می‌شوید.

۱۰۲. گزینهٔ «۴»

نکته

اتحادها کاربرد زیادی در تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها دارند که در اینجا مهم‌ترین آنها را معرفی می‌کنیم:

- اتحاد مربّع کامل:
$$(a+b)(a+b)=a^۲+b^۲+۲ab$$
$$(a-b)(a-b)=a^۲+b^۲-۲ab$$
- اتحاد مزدوج:
$$(a-b)(a+b)=a^۲+b^۲-۲ab$$
- اتحاد چاق و لاغر:
$$(a-b)(a^۲+b^۲+ab)=a^۳-b^۳$$
$$(a+b)(a^۲+b^۲-ab)=a^۳+b^۳$$
- اتحاد جمله مشترک:
$$(a+m)(a+n)=a^۲+(m+n)a+mn$$

طبق نکتهٔ بالا، عبارت $(x+y)(x+y)$، اتحاد مربّع کامل است:

$$(x+y)(x+y)=x^۲+y^۲+۲xy$$

۱۰۳. گزینهٔ «۲»

$$\frac{x}{y}=-۳\Rightarrow-\frac{۲x}{y}+\frac{۲}{۹}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=(-۲\times-۳)+(\frac{۲}{۹}\times-۳)-(\frac{-۱}{۳})=۶-\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}=۶-\frac{۱}{۳}=۵\frac{۲}{۳}$$

۱۰۴. گزینهٔ «۱» با توجه به نکتهٔ سؤال ۱۰۲، عبارت $(x+y)(x^۲+y^۲-xy)$ اتحاد چاق و لاغر است:

$$(x+y)(x^۲+y^۲-xy)=x^۳+y^۳$$

۱۰۵. گزینهٔ «۳»

$$\underbrace{(x-۱)(x+۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^۲+۱)(x^۴+۱)=\underbrace{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^۴+۱)=\underbrace{(x^۴-۱)(x^۴+۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=\underbrace{xx...x}_{\text{۸ بار}}-۱$$

۱۰۶. گزینهٔ «۲»

$$\underbrace{(x-y)(x+y)}_{\text{اتحاد مزدوج}}-\underbrace{(x-y)(x-y)}_{\text{اتحاد مربّع کامل}}=\cancel{x^۲}-y^۲-\cancel{x^۲}-y^۲+۲xy=-۲y^۲+۲xy$$

۱۰۷. گزینهٔ «۴» این عبارت همان اتحاد چاق و لاغر است؛ بنابراین:

$$(۴a-\frac{۱}{۳}b)(۱۶a^۲-\frac{۴}{۳}ab+\frac{۱}{۹}b^۲)=۴a\times۴a\times۴a-\frac{۱}{۳}b\times\frac{۱}{۳}b\times\frac{۱}{۳}b=۶۴a^۳-\frac{۱}{۲۷}b^۳$$

البته اگر این اتحاد را هم بلد نبودید، با ضرب این دو عبارت به همین پاسخ می‌رسیدید.

۱۰۸. گزینهٔ «۱»

$$(۴x-۳)(۵x+۱)=۲۰x^۲+۴x-۱۵x-۳=۲۰x^۲-۱۱x-۳$$

۱۰۹. گزینهٔ «۴» این عبارت همان اتحاد مزدوج است.

$$a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$$

$$۱۰۰۱\times۱۰۰۱-۱۰۰۰\times۱۰۰۰=(۱۰۰۱-۱۰۰۰)(۱۰۰۱+۱۰۰۰)=۲۰۰۱$$

۱۱۰. گزینهٔ «۳»

$$\text{مساحت مربّع} = \text{ضلع} \times \text{ضلع} = \frac{\text{قطر مربّع} \times \text{قطر مربّع}}{۲}$$

$$(x-y)(x-y)=\frac{(x+y)(x+y)}{۲} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲xy=\frac{x^{۲}+y^{۲}+۲xy}{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}-۴xy=x^{۲}+y^{۲}+۲xy$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۶xy=۰$$

۱۱۱. گزینهٔ «۳» همهٔ جمله‌های متشابه با $x^{۲}y$ را پیدا کرده و می‌نویسیم:

$$(ax-y-۱)(x^{۲}-yx-x+y)$$

جمله‌های متشابه با $x^{۲}y$: $-ax^{۲}y-x^{۲}y=\underbrace{-(a+۱)}_{-۸}x^{۲}y \Rightarrow -(a+۱)=-۸ \Rightarrow a+۱=۸ \Rightarrow a=۷$

۱۱۲. گزینهٔ «۲» در این نوع سؤال‌ها به دلیل اینکه جملهٔ «دو برابر اوّلی در دومی» در اتحاد مربّع کامل $((x+y)(x+y)=\cdots+۲xy+\cdots)$ ساده می‌شود، می‌توان طرفین عبارت را به توان ۲ رساند (یعنی در خودشان ضرب کرد):

$$\underbrace{(x-\frac{۱}{x})(x-\frac{۱}{x})}_{\text{اتحاد مربّع کامل}}=۳\times۳ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲\times\frac{۱}{\cancel{x}}\times\cancel{x}=۹ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x}-۲=۹ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=۱۱$$

این سؤال کمی سخت بود. *(قبول دارم خودمم اون موقع که دوم راهنمایی بودم، یعنی همین هفتم، عمراً اگه این سؤال رو می‌تونستم حل کنم!)*

۱۱۳. گزینهٔ «۱»

$$\underbrace{(x+\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})}_{\text{اتحاد مربّع کامل}}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲\times x\times\frac{۱}{x}=۸\times۸=۶۴ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲=۶۴ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=۶۲$$

۱۱۴. گزینهٔ «۴» این اتحاد، اتحاد مزدوج است.

$$a^{۲}-b^{۲}=(a-b)\underbrace{(a+b)}_{-۴}=۱۸$$

$$\Rightarrow (a-b)\times(-۴)=۱۸ \Rightarrow (a-b)=-\frac{۹}{۲}=-۴/۵$$

۱۱۵. گزینهٔ «۲»

$$\underbrace{(x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}})}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=(x+\frac{۱}{x})(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-x\times\frac{۱}{x}) \quad ①$$

$$x+\frac{۱}{x}=۱ \Rightarrow (x+\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})=۱ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲\times\frac{۱}{x}\times x=۱ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲=۱ \Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=-۱ \quad ②$$

$$\xrightarrow{①,②} (۱)\times(-۱-۱)=-۲$$

۱۱۶. گزینهٔ «۳»

مریم: x	روژین: y	سوگند: z	
$x-(z+y)$	$۲y$	$۲z$	← مریم به همان اندازه که سکه دارند سکه می‌دهد، یعنی پول آنها را دو برابر می‌کند.
$۲x-۲(z+y)$	$۲y-(۲z+x-(y+z))$	$۴z$	← روژین به همان اندازه که سکه دارند سکه می‌دهد، یعنی پول آنها را دو برابر می‌کند.
$۴x-۴(z+y)$	$۴y-۲(۲z+x-(y+z))$	$۴z-(۲x-۲(z+y)+۲y-(۲z+x-(y+z))$	← سوگند به همان اندازه که سکه دارند سکه می‌دهد، یعنی پول آنها را دو برابر می‌کند.

تعداد سکه‌های روژین: $۴y-۴z-۲x+۲y+۲z=۶y-۲z-۲x$

۱۱۷. گزینهٔ «۳»

$$۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{\underbrace{۱-\cfrac{۱}{x}}_{\frac{x-۱}{x}}}}=۱-\cfrac{۱}{۱-\underbrace{\cfrac{۱}{\frac{x-۱}{x}}}_{\frac{x}{x-۱}}}=۱-\cfrac{۱}{\underbrace{۱-\cfrac{x}{x-۱}}_{\frac{x-۱-x}{x-۱}}}\Rightarrow ۱-\cfrac{۱}{\cfrac{x-۱-x}{x-۱}}=۱-\cfrac{۱}{\underbrace{\cfrac{-۱}{x-۱}}_{-(x-۱)}}=۱+x-۱=x$$

۱۱۸. گزینهٔ «۴» روش اوّل:

$$[(((۵*۴)*۳)*۲)*۱]*۰$$

$$۱-۲\times۴$$

$$-۷*۳$$

$$۱-۲\times۳$$

$$-۶*۲$$

$$۱-۲\times۲$$

$$-۴*۱$$

$$۱-۲\times۱$$

$$-۲*۰$$

$$۱-۲\times۰=۱$$

روش دوم: همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، عمل $*$ فقط روی دومین عامل تأثیر دارد و اوّلین عامل حذف می‌شود؛ پس فقط باید تأثیر عمل $*$ را روی صفر که در آخر آمده، محاسبه کرد: $\square*۰=۱-۲\times۰=۱$

۱۱۹. گزینهٔ «۱»

$$-۳a(۱-b)+\frac{۲}{۳}b(۲a-۱)\xrightarrow[b=۳]{a=-۱}-۳\times(-۱)(۱-(۳))+\frac{۲}{۳}\times۳(۲\times(-۱)-۱)=+۳(-۲)+۲(-۳)=-۶+(-۶)=-۱۲$$

۱۲۰. گزینهٔ «۴»

$$a^۲-b^۲-۲ab\xrightarrow[b=-۱]{a=۲}۲\times۲-(-۱)\times(-۱)-۲\times۲\times(-۱)=۴-۱+۴=۷$$

۱۲۱. گزینهٔ «۴»

$$\frac{۱۳۹۴x^۲-۲۰۱۵xy+۱۴۳۶y^۲}{۲۸۷۲y^۲-۴۰۳۰xy+۲۷۸۸x^۲}=۰/۵=\frac{۱}{۲}$$

این کسر برابر با $\frac{۱}{۲}$ است؛ زیرا با دقت بیشتر می‌بینید که اگر صورت را دو برابر کنیم، مخرج به‌دست می‌آید.

۱۲۲. گزینهٔ «۳» اگر در این عبارت به جای n، ۲۰ قرار دهیم، در جایی که پرانتز $(۲۰-n)$ ظاهر می‌شود، حاصل برابر با $(۲۰-۲۰)=۰$ می‌شود و صفر ضرب در هر عددی برابر با صفر است.

۱۲۳. گزینهٔ «۱»

$$a^۲+b^۲+۲ab=\underbrace{(a+b)(a+b)}_{\text{اتحاد مربّع کامل}}=-۵\times-۵=+۲۵$$

۱۲۴. گزینهٔ «۴»

$$-a^۲x+x^۲a-\cancel{ax}+\cancel{xa}=-a^۲x+x^۲a=-\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{-۱}{۳}+\frac{-۱}{۳}\times\frac{-۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}=+\frac{۴}{۲۷}+\frac{۲}{۲۷}=\frac{۶}{۲۷}=\frac{۲}{۹}$$

۱۲۵. گزینهٔ «۲»

$$x-y=۰\Rightarrow x=y$$

$$۲x(۱-x)+۴x(۳-۳x)=۲x-۲xx+۱۲x-۱۲xx=۱۴x-۱۴xx=۱۴x(۱-x)$$

۱۲۶. گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{aligned}x+y&=۵\\x+z&=-۲\\y+z&=۸\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۲x+۲y+۲z=۱۱\Rightarrow x+y+z=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

۱۲۷. گزینهٔ «۴»

$$\frac{x}{y}=-۱۲۰\Rightarrow\frac{۲x}{۳y}=\frac{۲}{۳}\times\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\times-۱۲۰=-۸۰$$

۱۲۸. گزینهٔ «۱»

$$x+۴=y-۱=z-۸=w-۱۰$$

x از همه کوچک‌تر است؛ چون حتی اگر ۴ واحد به آن اضافه شود، با ده واحد کمتر از w، یک واحد کمتر از y و هشت واحد کمتر از z برابر می‌شود.

۱۲۹. گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} m=۳ \\ n=۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{mm+nn-mn}{\underbrace{n\times n\times ...\times n}_{m}-\underbrace{m\times m\times ...\times m}_{n}-(m-n)}=\frac{۳\times ۳+۴\times ۴-۱۲}{۴\times ۴\times ۴-۳\times ۳\times ۳\times ۳-(۳-۴)}$$

$$=\frac{۹+۱۶-۱۲}{۶۴-۸۱-(-۱)}=\frac{۱۳}{-۱۶}=-\frac{۱۳}{۱۶}$$

۱۳۰. گزینهٔ «۳»

$$abc=۱\Rightarrow ab=\frac{۱}{c}\Rightarrow \frac{۱+c}{۱+ab}=\frac{۱+c}{۱+\frac{۱}{c}}=\frac{۱+c}{\frac{۱+c}{c}}=\frac{\frac{۱+c}{۱}}{\frac{۱+c}{c}}=c$$

۱۳۱. گزینهٔ «۱» ابتدا باید مقدار z را پیدا کرده، سپس z را در عبارت A جایگذاری کنید تا A به‌دست آید.

$$z=\frac{-۲n+۱}{n-۳}\xrightarrow{n=۲}z=\frac{-۲\times ۲+۱}{۲-۳}=\frac{-۳}{-۱}=۳$$

$$A=\frac{-۳z+۵}{(\frac{۱}{z}-۲)-۱}\xrightarrow{z=۳}A=\frac{-۳\times ۳+۵}{(\frac{۱}{۳}-۲)-۱}=\frac{-۴}{-\frac{۸}{۳}}=\frac{-۱۲}{-۸}=۱/۵$$

۱۳۲. گزینهٔ «۱»

$$aa-bb=۰\Rightarrow aa=bb\Rightarrow \begin{cases} a=+b \\ a=-b \end{cases}$$

چون هر دو عدد طبیعی‌اند، فقط $a=b$ قابل قبول است:

$$\frac{a-b}{\underbrace{a\times \cdots \times a}_{\text{b بار}}+\underbrace{b\times \cdots \times b}_{\text{a بار}}}=\frac{۰}{\cdots}=۰$$

۱۳۳. گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{matrix} ۲x+۳y=-۸ \\ ۲y+۳z=۷ \\ ۲z+۳x=-۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow (۲x+۳x)+(۳y+۲y)+(۲z+۳z)=-۸+۷-۱\Rightarrow ۵x+۵y+۵z=-۲\Rightarrow ۵(x+y+z)=-۲$$

$$\Rightarrow x+y+z=\frac{-۲}{۵}=-۰/۴$$

در نتیجه:

$$\text{ربع}\,(-۰/۴)=\frac{۱}{۴}\times(-۰/۴)=-۰/۱$$

۱۳۴. گزینهٔ «۴»

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{c}{d}=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow b=۳a\ ,\ d=-۵c$$

b و d را بر حسب a و c می‌نویسیم:

$$\frac{-۲\times a\times c+۰/۲\times ۳a\times(-۵c)}{۴\times ۳a\times(-۵c)-۸ac}=\frac{-۲ac-۳ac}{-۶۰ac-۸ac}=\frac{-۵ac}{-۶۸ac}=\frac{۵}{۶۸}$$

۱۳۵. گزینهٔ «۱»

$$\underbrace{۵y-۳z}_{A}=۷\Rightarrow \frac{۲/۵y-۱/۵z}{۱۲z-۲۰y}=\frac{\frac{A}{۲}}{-۴A}=-\frac{۱}{۸}$$

استفاده از این روش حل، بسیاری از مسائل سخت و پیچیده را ساده می‌کند و می‌توانیم یک عبارت ثابت را با متغیّری نام‌گذاری کنیم و مسئله را حل کنیم. به این روش، تغییر متغیّر می‌گویند.

۱۳۶. گزینهٔ «۴»

$$(a+\frac{۱}{a})(a+\frac{۱}{a})=aa+\frac{۱}{aa}+۲a\times\frac{۱}{a}=\underbrace{aa+\frac{۱}{aa}}_{\text{همواره بزرگ‌تر از صفر}}+۲$$

بنابراین حداقل مقدار $a+\frac{۱}{a}$ همواره از ۲ بزرگ‌تر است.

۱۳۷. گزینهٔ «۴»

$$\frac{۲\times x^{۲}+۲}{x}-۸=\frac{۲\times x\times \cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{۲}{x}-۸=۲x+\frac{۲}{x}-۸\Rightarrow ۲\underbrace{(x+\frac{۱}{x})}_{\text{همواره بزرگ‌تر از ۲}}-۸>۲^{۲}-۸=۴-۸=-۴$$

۱۳۸. گزینهٔ «۳»

$$x=1\Rightarrow -m+2n+t=\frac{1}{2}-1\Rightarrow -m+2n+t=\frac{-1}{2}$$

$$-2t-4n+2m+1=-2\underbrace{(t+2n-m)}_{-\frac{1}{2}}+1=-2\times-\frac{1}{2}+1=2$$

۱۳۹. گزینهٔ «۱»

$$\underbrace{(7-a)}_{\substack{3\\ \downarrow\\ a=4}}\times\underbrace{(7-b)}_{\substack{7\\ \downarrow\\ b=0}}\times\underbrace{(7-c)}_{\substack{5\\ \downarrow\\ c=2}}\times\underbrace{(7-d)}_{\substack{1\\ \downarrow\\ d=6}}=105=3\times7\times5\times1$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=4+0+2+6=12$$

۱۴۰. گزینهٔ «۴»

$$3-\frac{2}{3-\frac{2}{x}}=2\Rightarrow\frac{2}{3-\frac{2}{x}}=1\xrightarrow{\div 2}\frac{1}{\underbrace{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}_{\text{روش تغییر متغیّر: } t=1}}=1$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\underbrace{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}_{t=1}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

۱۴۱. گزینهٔ «۴» عبارتی که دو بار در خود ضرب می‌شود (در فصل توان و جذر می‌گوییم به توان ۲ رسیده است)، همواره مثبت است.

از طرفی عددهای فرد را نیز با $(2x-1)$ یا $(2x+1)$ نشان می‌دهیم؛ پس عبارت $(2x-1)(2x-1)$ مثبت و فرد است.

۱۴۲. گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{matrix}ab=-128\\ bc=-64\\ ca=8\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=-4\\ b=32\\ c=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2(-4-32-(-2))=2(-34)=-68$$

یا

$$\left.\begin{matrix}a=4\\ b=-32\\ c=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2(4-(-32)-2)=2(34)=68$$

که با توجه به گزینه‌ها، فقط ۶۸− در گزینهٔ ۲ آمده؛ پس گزینهٔ ۲ درست است.

۱۴۳. گزینهٔ «۱»

$$\frac{a}{b}=-\frac{1}{x}=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow a=-b$$ (a و b قرینهٔ یکدیگرند.)

$$\Rightarrow\frac{(3a-5b)(-x)\times(-b)}{(a-b-x)(abx)}=\frac{(3a-5(-\cancel{a}))}{(a+a-1)(\cancel{a})(-a)(1)}=\frac{\cancel{(8a)\times(-1)}}{(2a-1)(\cancel{-a})}=\frac{8}{2a-1}$$

۱۴۴. گزینهٔ «۴» روش اوّل:

قیمت پاک‌کن‌ها: ۱۲۰۰ تومان پرداخت کرده − ۱۰۰ تومان پس گرفته = ۱۱۰۰ تومان

قیمت هر پاک‌کن: $1100\div5=220$ تومان

روش دوم: حال به‌صورت معادله می‌نویسیم:

$$5x+100=1200\Rightarrow 5x=1200-100=1100\Rightarrow x=\frac{1100}{5}\Rightarrow x=220$$ تومان

۱۴۵. گزینهٔ «۳»

$$\frac{3}{2}=\frac{9}{4}x-3\Rightarrow\frac{3}{2}+3=\frac{9}{4}x\Rightarrow\frac{9}{2}=\frac{9}{4}x\Rightarrow x=2$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری می‌کنیم}}\frac{3}{4}x+1=\frac{3}{4}\times2+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}=2/5$$

۱۴۶. گزینهٔ «۲»

نکته اگر کسری برابر با صفر باشد، صورت آن صفر است.

$$\frac{9x-3}{2x+1}=0 \Rightarrow 9x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \qquad \frac{x-1}{x+1}\xrightarrow{x=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$$

۱۴۷. گزینهٔ «۳»

$$-5(x-3)=25(9-3x)$$

اگر دو عدد در طرفین تساوی ضرب شده باشند (مشابه بالا)، می‌توان این عددها را (اگر قابل ساده شدن باشند) با هم ساده کرد؛ برای نمونه در این سؤال، ۵− و ۲۵ با ۵ ساده می‌شوند:

$$-(x-3)=5(9-3x) \Rightarrow -x+3=45-15x \Rightarrow -x+15x=45-3 \Rightarrow 14x=42 \Rightarrow x=3$$

۱۴۸. گزینهٔ «۳»

$$\text{عدد}=x \Rightarrow 15\% \times x=6 \Rightarrow \frac{15}{100}x=6 \Rightarrow x=\frac{6\times 100}{15} \Rightarrow x=40$$

$$\text{عدد } 40\%=\frac{40}{100}\times 40=16$$

۱۴۹. گزینهٔ «۴»

$$-5(x-9)=60 \xrightarrow{\div 5\ \text{طرفین}} -(x-9)=12 \Rightarrow -x+9=12 \Rightarrow -x=12-9 \Rightarrow -x=3 \Rightarrow x=-3$$

۱۵۰. گزینهٔ «۴»

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x=-78 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{30x-20x+15x-12x}{60}=-78 \Rightarrow \frac{13x}{60}=-78$$

$$\Rightarrow x=\frac{60\times -78}{13} \Rightarrow x=-360 \xrightarrow{\text{جایگذاری می‌کنیم}} \frac{-360-10}{120}=\frac{-370}{120}=-\frac{37}{12}$$

۱۵۱. گزینهٔ «۳»

$$\frac{x^2-4}{2x-4}=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\begin{cases}+2\\-2\end{cases}$$

دربارهٔ اینکه چرا این معادله دو جواب دارد، تحقیق کنید.

۱۵۲. گزینهٔ «۴»

نکته هرگاه عدد، متغیّر یا عبارتی دو بار در خودش ضرب شود، حتماً نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) است.

در این سؤال، دو عدد نامنفی با هم جمع شده‌اند و حاصلشان صفر شده است. پس هر دو آنها صفر هستند. (چرا؟)

$$\left.\begin{matrix}(x-2)(x-2)=0 \Rightarrow x=2\\(y-5)(y-5)=0 \Rightarrow y=5\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x+2y=5\times 2+2\times 5=20$$

۱۵۳. گزینهٔ «۳»

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی مثلث}=180^\circ \Rightarrow (2x-4^\circ)+(1^\circ-x)+(5x+9^\circ)=180^\circ$$

$$\Rightarrow 6x+6^\circ=180^\circ \Rightarrow 6x=180^\circ-6^\circ=174^\circ \Rightarrow 6x=174^\circ \Rightarrow x=\frac{174^\circ}{6}=29^\circ$$

۱۵۴. گزینهٔ «۴» روش اوّل:

سه عدد متوالی: $n, n+1, n+2$

$$(n)+(n+1)+(n+2)=33 \Rightarrow 3n+3=33 \Rightarrow 3n=30 \Rightarrow n=10$$

عدد میانی: $n+1=10+1=11$

روش دوم: چون عددها متوالی‌اند و تعداد آنها فرد است، عدد وسط همان میانگین خواهد بود: عدد وسط: $\frac{33}{3}=11$