پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱.گزینهٔ «۲» از عدد ۱ تا ۷۲۰، ۹تا عدد یک‌رقمی، ۹۰تا عدد دورقمی و ۶۲۱تا عدد سه‌رقمی داریم؛ پس:

$$۹\times۱+۹۰\times۲+۶۲۱\times۳=۹+۱۸۰+۱۸۶۳=۲۰۵۲ \text{ رقم}$$

۲.گزینهٔ «۴» برای شماره‌گذاری صفحه‌های این کتاب حتماً ۹تا عدد یک‌رقمی، ۹۰تا عدد دورقمی، ۹۰۰تا عدد سه‌رقمی و xتا عدد چهاررقمی داریم؛ پس:

$$۹\times۱+۹۰\times۲+۹۰۰\times۳+x\times۴=۶۱۰۵ \Rightarrow ۹+۱۸۰+۲۷۰۰+۴x=۶۱۰۵ \Rightarrow ۴x=۶۱۰۵-۲۸۸۹ \Rightarrow ۴x=۳۲۱۶$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳۲۱۶}{۴} \Rightarrow x=۸۰۴$$

$$\text{تعداد صفحات کتاب}=۹+۹۰+۹۰۰+۸۰۴=۱۸۰۳ \Rightarrow \begin{array}{r|l} ۱۸۰۳ & ۲ \\ \hline -۱۸۰۰ & ۹۰۰ \\ ۳ & +\,۱ \\ -۲ & ۹۰۱ \Rightarrow ۹۰۱+۱=۹۰۲ \text{ برگ} \\ ۱ & \end{array}$$

۳.گزینهٔ «۲» با استفاده از اصل ضرب تعداد عددهای یک تا پنج‌رقمی که می‌توان با این رقم‌ها نوشت را مشخص می‌کنیم:

$\text{تعداد عددهای یک‌رقمی} = ۳$

$\text{تعداد عددهای دورقمی} = ۳\times۳ = ۹$

$\text{تعداد عددهای سه‌رقمی} = ۳\times۳\times۳ = ۲۷$

$\text{تعداد عددهای چهاررقمی} = ۳\times۳\times۳\times۳ = ۸۱$

برای نوشتن عددهای طبیعی پنج‌رقمی کوچک‌تر از ۷۸۲۶۱ با رقم‌های ۸، ۷ و ۶ دهگان هزار می‌تواند ۶ یا ۷ باشد؛ بنابراین:

تعداد عددهای پنج‌رقمی
- با دهگان هزار ۶ ← $۱\times۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$
- با دهگان هزار ۷ ← $۱\times\underbrace{۲}_{\text{فقط رقم‌های ۶ و ۷}}\times۳\times۳\times۳=۵۴$

پس تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۷۸۲۶۱ برابر است با: $۳+۹+۲۷+۸۱+۸۱+۵۴=۲۵۵$

۴.گزینهٔ «۳» تعداد رقم‌هایی که برای شماره‌گذاری لازم است، برابر است با:

$$۹\times۱+۹۰\times۲+\underbrace{(۶۲۴-۹۹)}_{\text{تعداد عددهای سه‌رقمی}}\times۳=۹\times۱+۹۰\times۲+۵۲۵\times۳=۹+۱۸۰+۱۵۷۵=۱۷۶۴$$

۵.گزینهٔ «۳» روش اول:

از ۱ تا ۱۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
از ۱۰۰ تا ۲۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
⋮
از ۹۰۰ تا ۱۰۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
⇐ ۱۰۰ = ۱۰×۱۰ عدد با یکان ۷ از ۱ تا ۱۰۰۰ وجود دارد.

از ۱۰۰۰ تا ۱۱۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
از ۱۱۰۰ تا ۱۲۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
⋮
از ۱۹۰۰ تا ۲۰۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
⇐ ۱۰۰ = ۱۰×۱۰ عدد با یکان ۷ از ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ وجود دارد.

از ۲۰۰۰ تا ۲۱۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
از ۲۱۰۰ تا ۲۲۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
⋮
از ۲۹۰۰ تا ۳۰۰۰ ده‌تا عدد یکان ۷ دارند.
⇐ ۱۰۰ = ۱۰×۱۰ عدد با یکان ۷ از ۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰ وجود دارد.

⇐ تعداد کل عددها = ۱۰۰+۱۰۰+۱۰۰ = ۳۰۰

روش دوم:

تعداد حالت‌ها در عددهای یک‌رقمی: $\overset{\text{یکان}}{۱}$ حالت ⇐ تعداد عددهای یک‌رقمی = ۱

تعداد حالت‌ها در عددهای دورقمی: $\overset{\text{دهگان}}{۹} \times \overset{\text{یکان}}{۱} = ۹$ حالت ⇐ تعداد عددهای دورقمی = ۹

تعداد حالت‌ها در عددهای سه‌رقمی: $\overset{\text{صدگان}}{۹} \times \overset{\text{دهگان}}{۱۰} \times \overset{\text{یکان}}{۱} = ۹۰$ حالت ⇐ تعداد عددهای سه‌رقمی = ۹۰

تعداد حالت‌ها در عددهای چهاررقمی: $\overset{\text{هزارگان}}{۲} \times \overset{\text{صدگان}}{۱۰} \times \overset{\text{دهگان}}{۱۰} \times \overset{\text{یکان}}{۱} = ۲۰۰$ حالت ⇐ تعداد عددهای چهاررقمی = ۲۰۰

بنابراین: تعداد کل عددها = ۱+۹+۹۰+۲۰۰ = ۳۰۰

۶. گزینهٔ «۴» هرچه عدد کوچک‌تر باشد، تعداد رقم‌های آن کمتر و خود رقم‌ها بزرگ‌ترند؛ پس بزرگ‌ترین رقم، ۹ است:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۱۵ & ۹ \\ \hline -۹۰۰ & ۱۰۰ \\ ۱۱۵ & ۱۰ \\ -۹۰ & +\ ۲ \\ ۲۵ & ۱۱۲ \\ -۱۸ & \\ ۷ & \end{array}$$

یعنی ۱۱۲تا ۹ و یکی ۷ داریم؛ پس کوچک‌ترین عدد طبیعی که مجموع رقم‌هایش ۱۰۱۵ باشد، $۷\underbrace{۹۹\cdots۹}_{\text{۱۱۲تا}}$ است.

۷. گزینهٔ «۲» اگر عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰۱ را پشت‌سرهم بنویسیم، مجموع رقم‌های ۹ عدد یک‌رقمی، ۹۰ عدد دورقمی و ۹۰۰ عدد سه‌رقمی برابر است با: ۹+۱۸۰+۲۷۰۰ = ۲۸۸۹

برای مشخص کردن ۳۰۰۰اُمین رقم، ابتدا باید مشخص کنیم این رقم مربوط به کدام عدد چهاررقمی است؛ برای این کار باید مشخص کنیم که بزرگ‌ترین مضرب عدد ۴ نزدیک به ۱۱۱ (۲۸۸۹ − ۳۰۰۰) کدام عدد است. از آنجایی که ۱۰۸ = ۲۷×۴ ، بنابراین رقم ۳۰۰۰اُم باید سومین (۱۰۸−۱۱۱) رقم عدد ۱۰۲۷ باشد:

$$\underbrace{۱\ ۲\ \ldots\ ۹}_{\text{۹ = ۹تا یک‌رقمی}} \quad \underbrace{۱۰\ ۱۱\ \ldots\ ۹۹}_{\text{۱۸۰ = ۹۰تا دورقمی}} \quad \underbrace{۱۰۰\ ۱۰۱ \cdots ۹۹۹}_{\text{۲۷۰۰ = ۹۰۰تا سه‌رقمی}} \quad \underbrace{۱۰۰۰\ ۱۰۰۱ \cdots ۱۰۲۶}_{\text{۱۰۸ = ۲۷تا چهاررقمی}}\ ۱۰۲۷$$

۹+۱۸۰+۲۷۰۰+۱۰۸+۳ = ۳۰۰۰

در نتیجه ۳۰۰۰اُمین رقم، رقم ۲ و مربوط به عدد ۱۰۲۷ است.

۸. گزینهٔ «۳»

روش اول: عددهایی که مقلوبشان با خودشان برابر است عبارت‌اند از:

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{۱۰۱, ۲۰۲, \ldots, ۹۰۹}^{\text{۹تا}} \\ ۱۱۱, ۲۱۲, \ldots, ۹۱۹ \\ ۱۲۱, ۲۲۲, \ldots, ۹۲۹ \\ ۱۳۱, ۲۳۲, \ldots, ۹۳۹ \\ ۱۴۱, ۲۴۲, \ldots, ۹۴۹ \\ ۱۵۱, ۲۵۲, \ldots, ۹۵۹ \\ ۱۶۱, ۲۶۲, \ldots, ۹۶۹ \\ ۱۷۱, ۲۷۲, \ldots, ۹۷۹ \\ ۱۸۱, ۲۸۲, \ldots, ۹۸۹ \\ ۱۹۱, ۲۹۲, \ldots, ۹۹۹ \end{array}\right\}\text{۱۰تا} \Rightarrow ۹\times۱۰ = ۹۰ \text{ عدد}$$

روش دوم: مقدار یک عدد سه‌رقمی به‌صورت $\overline{abc}$ برابر با $100a+10b+c$ است؛ مقلوب این عدد $\overline{cba}$ می‌شود که مقدار آن $100c+10b+a$ است:

$$100a+\cancel{10b}+c = 100c+\cancel{10b}+a \Rightarrow 99a = 99c \Rightarrow a = c$$

پس باید به دنبال عددهایی سه‌رقمی با یکان و صدگان برابر با هم باشیم و با توجه به تکراری بودن رقم‌های یکان و صدگان آن داریم:

تعداد حالت‌ها = $\overset{\text{صدگان}}{۹} \times \overset{\text{دهگان}}{۱۰} = ۹۰$ حالت

۹. گزینهٔ «۲» با راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر به‌راحتی می‌توانیم به پاسخ برسیم:

$۴\times۵=۲۰$

$۴۴\times۵۵=۲۴۲۰$

$۴۴۴\times۵۵۵=۲۴۶۴۲۰$

$\vdots$

۱۰. گزینهٔ «۳» چون عدد سه‌رقمی زوج است، یکان حتماً زوج است؛ بنابراین برای اینکه جمع رقم‌های این عدد نیز زوج باشد، دهگان و صدگان حتماً یا هر دو زوج‌اند یا فرد؛ حالت‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم:

حالت اول:

یکان	دهگان	صدگان
۰	۰	۲
۲	۲	۴
۴	۴	۶
۶	۶	۸
۸	۸	

$۱۰۰=۵\times۵\times۴=$ تعداد حالت‌ها

حالت دوم:

یکان	دهگان	صدگان
۰	۱	۱
۲	۳	۳
۴	۵	۵
۶	۷	۷
۸	۹	۹

$۱۲۵=۵\times۵\times۵=$ تعداد حالت‌ها

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$۱۰۰+۱۲۵=۲۲۵$

۱۱. گزینهٔ «۱» عددهای دورقمی که دهگانشان از یکانشان کوچک‌تر است، مقلوبشان از خودشان بزرگ‌تر می‌شود؛ پس:

۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹

۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۲۹

۳۴, ۳۵, ۳۶, ۳۷, ۳۸, ۳۹

۴۵, ۴۶, ۴۷, ۴۸, ۴۹

۵۶, ۵۷, ۵۸, ۵۹

۶۷, ۶۸, ۶۹

۷۸, ۷۹

۸۹

$۳۶=\frac{۸\times(۸+۱)}{۲}=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸=$ تعداد عددها

۱۲. گزینهٔ «۲» عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۶۷۳۳ عبارت‌اند از:

$\underbrace{۱۰۰۰,۱۰۰۱,\ldots,۶۷۳۲}_{\underbrace{\underbrace{(۶۷۳۲-۹۹۹)}_{۵۷۳۳}\times۴}_{\text{۲۲۹۳۲رقم}}}\ ,\ \underbrace{۱۰۰,۱۰۱,\ldots,۹۹۹}_{\text{۲۷۰۰رقم}}\ ,\ \underbrace{۱۰,۱۱,\ldots,۹۹}_{\text{۱۸۰رقم}}\ ,\ \underbrace{۱,۲,\ldots,۹}_{\text{۹رقم}}$

$\Rightarrow ۹+۱۸۰+۲۷۰۰+۲۲۹۳۲=۲۵۸۲۱$ رقم

۱۳. گزینهٔ «۲»

نکته عددهای $۲n+۱$ و $۲n-۱$ از یک مضرب ۲، یک واحد بیشتر یا یک واحد کمترند؛ پس قطعاً عددهایی فردند.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

فرد = فرد × فرد

۱۴. گزینهٔ «۳»

$\underset{\text{یکان}}{۷}\times\underset{\text{دهگان}}{۸}\times\underset{\text{صدگان}}{۹}=$ حالت ۵۰۴ = تعداد حالت‌ها

۱۵. گزینهٔ «۱»

$$۱۳۳+۱۴۳+۱۵۳+\cdots+۲۲۳=\text{مجموع}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{۲۲۳-۱۳۳}{۱۰}+۱=\dfrac{۹۰}{۱۰}+۱=۹+۱=۱۰=\text{تعداد}\\[2ex] \dfrac{۱۳۳+۲۲۳}{۲}=\dfrac{۳۵۶}{۲}=۱۷۸=\text{میانگین}\end{array}\right\}\Rightarrow ۱۷۸\times۱۰=۱۷۸۰=\text{مجموع}$$

۱۶. گزینهٔ «۱» عددهای ۷۸، ۸۰ تا ۸۷، ۸۹، ۹۸، ۱۰۸، ۱۱۸، ۱۲۸، ۱۳۸، ۱۴۸، ۱۵۸، ۱۶۸، ۱۷۸، ۱۸۰ تا ۱۸۷ و ۱۸۹ یک رقم ۸ دارند و عددهای ۸۸ و ۱۸۸ دو رقم ۸ دارند: $۲۸+۴=۳۲=\text{تعداد رقم‌های ۸}$

۱۷. گزینهٔ «۳»

نکته حاصل ضرب رقم‌های عددهای دورقمی طبیعی که یکی از رقم‌هایشان زوج طبیعی باشد، زوج طبیعی است.

با توجه به نکته این عددها عبارت‌اند از: ۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۲۵,۲۶,۲۷,۲۸,۲۹

۱۸. گزینهٔ «۲»

$$۶*۷=۶\times۷-۷=۴۲-۷=۳۵\Rightarrow ۵*۳۵=۵\times۳۵-۳۵=۱۷۵-۳۵=۱۴۰$$

۱۹. گزینهٔ «۴»

$$۲+۴+۶+\cdots+۵۰۰۲=\text{مجموع}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{۵۰۰۲-۲}{۲}+۱=\dfrac{۵۰۰۰}{۲}+۱=۲۵۰۰+۱=۲۵۰۱=\text{تعداد}\\[2ex] \dfrac{۵۰۰۲+۲}{۲}=\dfrac{۵۰۰۴}{۲}=۲۵۰۲=\text{میانگین}\end{array}\right\}\Rightarrow ۲۵۰۱\times۲۵۰۲=\overline{\cdots۰۰۱}\times\overline{\cdots۰۰۲}=\overline{\cdots۰۰۲}=\text{مجموع}$$

۲۰. گزینهٔ «۲» $۱۰۰۰\times۱۰۰۱\times\cdots\times۹۹۹۹$

اگر حتی یک عدد زوج در عامل‌های ضرب وجود داشته باشد، حاصل ضرب زوج می‌شود.

۲۱. گزینهٔ «۳»

میلی‌متر ۶۰۰۰ = متر ۶ = ۲×۳ = اختلاف ارتفاع طبقه‌های ۳۷اُم و ۳۹اُم

$$۶۰۰۰\div۶=۱۰۰۰=\text{تعداد جهش‌ها}$$

۲۲. گزینهٔ «۱» سه عدد را x، y و z در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y+z}{۴}=۳۰\Rightarrow x+y+z=۱۲۰\\[2ex] ۴(x+y)=۲۴۰\Rightarrow x+y=۶۰\end{array}\right\}\Rightarrow z=۱۲۰-۶۰=۶۰$$

۲۳. گزینهٔ «۲»

$$\overline{abcd۱}-\overline{۱abcd}=۲۳۷۰۶$$

$$\Rightarrow(۱۰۰۰۰a+۱۰۰۰b+۱۰۰c+۱۰d+۱)-(۱۰۰۰۰+۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d)=۲۳۷۰۶$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰۰a+۱۰۰۰b+۱۰۰c+۱۰d+۱-۱۰۰۰۰-۱۰۰۰a-۱۰۰b-۱۰c-d=۲۳۷۰۶$$

$$\Rightarrow ۹۰۰۰a+۹۰۰b+۹۰c+۹d-۹۹۹۹=۲۳۷۰۶\Rightarrow ۹(۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d)=۲۳۷۰۶+۹۹۹۹$$

$$\Rightarrow ۹(۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d)=۳۳۷۰۵\Rightarrow ۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d=\frac{۳۳۷۰۵}{۹}\Rightarrow ۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d=۳۷۴۵$$

$$\Rightarrow\overline{abcd}=۳۷۴۵\Rightarrow ۳+۷+۴+۵=۱۹=\text{مجموع رقم‌ها}$$

۲۴. گزینهٔ «۱»

یکان	دهگان	صدگان
۱	۰	۲
۳	۲	۴
۵	۴	۶
۷	۶	۸
۹	۸	

عدد $100 = 5 \times 5 \times 4 =$ تعداد حالت‌ها

۲۵. گزینهٔ «۴»

$$|\overline{ab}-\overline{ba}| = |10a+b-10b-a| = |9a-9b| = |9(a-b)| = 9|a-b| = 72 \Rightarrow |a-b| = 8$$

اگر $a-b=8$:
- حالت اول: $a-b=9-1 \Rightarrow \overline{ab}=91$ قابل قبول
- حالت دوم: $a-b=8-0 \Rightarrow \overline{ab}=80$ غیرقابل قبول (زیرا مقلوبش عدد دورقمی محسوب نمی‌شود.)

اگر $a-b=-8$:
- حالت اول: $a-b=1-9 \Rightarrow \overline{ab}=19$ قابل قبول
- حالت دوم: $a-b=0-8 \Rightarrow \overline{ab}=08$ غیرقابل قبول (زیرا عدد دورقمی محسوب نمی‌شود.)

پس قدر مطلق تفاضل دو عدد ۱۹ و ۹۱ از مقلوبشان مساوی ۷۲ است.

۲۶. گزینهٔ «۲»

$$\overline{ab} = 5(a+b) \Rightarrow 10a+b = 5a+5b \Rightarrow 10a-5a = 5b-b \Rightarrow 5a = 4b \Rightarrow a = 4(b-a)$$

با توجه به اینکه a عددی طبیعی و b عددی حسابی است، b باید از a بزرگ‌تر باشد؛ بنابراین a و b به‌ترتیب فقط می‌توانند ۴ و ۵ باشند؛ پس عدد موردنظر ۴۵ است.

۲۷. گزینهٔ «۱»

$$\overline{xyz}+\overline{zyx} = (100x+10y+z)+(100z+10y+x) = 101x+101z+20y = 101(x+z)+20y$$

این عبارت زمانی حداکثر مقدار را دارد که $x=9$، $y=7$ و $z=8$؛ در نتیجه:

$$101(17)+20(7) = 1857$$

۲۸. گزینهٔ «۲»

$$\overline{ab}-\overline{ba} = 45 \Rightarrow 10a+b-10b-a = 45 \Rightarrow 9a-9b = 45 \Rightarrow 9(a-b) = 45 \Rightarrow a-b = 5$$

$a=6, b=1 \Rightarrow 6-1=5 \Rightarrow \overline{ab}=61$ $a=5, b=0 \Rightarrow 5-0=5 \Rightarrow \overline{ab}=50$

$a=8, b=3 \Rightarrow 8-3=5 \Rightarrow \overline{ab}=83$ $a=7, b=2 \Rightarrow 7-2=5 \Rightarrow \overline{ab}=72$

$a=9, b=4 \Rightarrow 9-4=5 \Rightarrow \overline{ab}=94$

۲۹. گزینهٔ «۴»

$$\overline{abc}-\overline{cba} = 100a+\cancel{10b}+c-100c-\cancel{10b}-a = 99a-99c = 99(a-c) = 3^2 \times 11(a-c)$$

$$\left.\begin{array}{l} 11 = \text{بزرگ‌ترین شمارندهٔ اول} \\ 3 = \text{کوچک‌ترین شمارندهٔ اول} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین شمارندهٔ اول} = 11-3 = 8$$

۳۰. گزینهٔ «۳»

$$\overline{a}+\overline{ab}+\overline{bac}-\overline{bc} = a+10a+b+100b+10a+\cancel{c}-10b-\cancel{c} = 21a+91b$$

۳۱. گزینهٔ «۳»

$$(\overline{abc})(\overline{ab}-c)+90ac+9bc+c^2 = (100a+10b+c)(10a+b-c)+90ac+9bc+c^2$$

$$= 1000a^2+100ab-\cancel{100ac}+100ab+10b^2-\cancel{10bc}+\cancel{10ac}+\cancel{bc}-\cancel{c^2}+\cancel{90ac}+\cancel{9bc}+\cancel{c^2} = 1000a^2+200ab+10b^2$$

۳۲. گزینهٔ «۲»

نکته اگر علامت «!» جلوی عددی طبیعی قرار بگیرد، موقع خواندن عدد، پسوند فاکتوریل بعد از آن تلفظ می‌شود که در بعضی از کتاب‌ها به این عددها، عددهای متعجب نیز گفته شده است. برای به‌دست آوردن حاصل آن کافی است آن عدد را در عددهای طبیعی قبلی‌اش ضرب کنیم.

مثال: $۴!=۴\times۳\times۲\times۱$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم: $۷!=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵۰۴۰$

۳۳. گزینهٔ «۲» توجه: قرارداد شده است که $۰!=۱$.

$(۵!-۰!)^۲=(۵\times۴\times۳\times۲\times۱-۱)^۲=(۱۲۰-۱)^۲=۱۱۹^۲$

۳۴. گزینهٔ «۴» $۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۹!$

۳۵. گزینهٔ «۳» برای درک بهتر پاسخ این سؤال به مثال روبه‌رو توجه کنید: $۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۴\times۳!=۴\times۳\times۲!$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$$

۳۶. گزینهٔ «۱» روش اول: برای پیدا کردن تعداد صفرهای سمت راست یک عدد، تقسیم‌های متوالی بر ۵ را تا جایی ادامه می‌دهیم که خارج قسمتش کوچک‌تر از ۵ باشد:

$$۴۰۰\,\big|\,\underline{۵}\;\;۸۰\,\big|\,\underline{۵}\;\;۱۶\,\big|\,\underline{۵}\;\;۳$$

مجموع خارج قسمت‌های به‌دست آمده پاسخ است: $۸۰+۱۶+۳=۹۹$

روش دوم: از آنجایی که صفر سمت راست هر عدد از حاصل ضرب ۲ و ۵ ساخته می‌شود و تعداد ۵ها در $n!$ از تعداد ۲ها کمتر است، باید تعداد عامل‌های ۵ را در n بشماریم.

نکته برای پیدا کردن تعداد صفرهای سمت راست $n!$ می‌توانیم از قانون چبی‌شف به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$n\,\big|\,\frac{۵}{a}\quad n\,\big|\,\frac{۵^۲}{b}\quad n\,\big|\,\frac{۵^۳}{c}\quad\cdots\quad n\,\big|\,\frac{۵^m}{d}\qquad ۵^m<n$$

$\Rightarrow$ تعداد صفرهای سمت راست $n! = a+b+c+\cdots+d$

طبق نکتهٔ بالا داریم: $۴۰۰\,\big|\,\frac{۵}{۸۰}\quad ۴۰۰\,\big|\,\frac{۵^۲}{۱۶}\quad ۴۰۰\,\big|\,\frac{۵^۳}{۳}$

پس تعداد صفرهای سمت راست $۴۰۰!$ برابر است با: $۸۰+۱۶+۳=۹۹$

۳۷. گزینهٔ «۳»

نکته از عدد $۴!$ به بعد یکان حاصل عددهای فاکتوریل‌دار، صفر است.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم: $۱!+۳!+۵!+\cdots+(۲n-۱)!=۱+۶+\overline{\cdots۰}+\cdots+\overline{\cdots۰}=\overline{\cdots۷}$

۳۸. گزینهٔ «۲»

$$۱۰!=۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=(۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶)\times(۷\times\underbrace{۲\times۲\times۲}_{۸}\times\underbrace{۳\times۳}_{۹}\times\underbrace{۲\times۵}_{۱۰})$$

$$=(۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶)\times(۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲)=۶!\times۷!\Rightarrow\begin{cases}a=۶\\b=۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow|a^۲-b^۲|=|۶^۲-۷^۲|=|۳۶-۴۹|=|-۱۳|=۱۳$$

۳۹.گزینهٔ «۱» روش اول:

$$۲۲۱\,\big|\underline{۵}\;\;۴۴\,\big|\underline{۵}\;\;۸\,\big|\underline{۵}\;\;۱ \Rightarrow ۴۴+۸+۱=۵۳$$

روش دوم: با توجه به نکتهٔ سؤال ۳۶ داریم:

$$۲۲۱\,\big|\underline{۵}\;\;۴۴ \qquad ۲۲۱\,\big|\underline{\overset{۵^۲}{۲۵}}\;\;۸ \qquad ۲۲۱\,\big|\underline{\overset{۵^۳}{۱۲۵}}\;\;۱ \Rightarrow ۴۴+۸+۱=۵۳$$

۴۰.گزینهٔ «۳» روش اول:

$$۲۲۲۲\,\big|\underline{۱۱}\;\;۲۰۲\,\big|\underline{۱۱}\;\;۱۸\,\big|\underline{۱۱}\;\;۱ \Rightarrow ۲۰۲+۱۸+۱=۲۲۱$$

روش دوم:

$$۲۲۲۲\,\big|\underline{۱۱}\;\;۲۰۲ \qquad ۲۲۲۲\,\big|\underline{\overset{۱۱^۲}{۱۲۱}}\;\;۱۸ \qquad ۲۲۲۲\,\big|\underline{\overset{۱۱^۳}{۱۳۳۱}}\;\;۱ \Rightarrow ۲۰۲+۱۸+۱=۲۲۱$$

۴۱.گزینهٔ «۴» روش اول:

$$۶!\times۷!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۲\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲=۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷\times۸\times۹\times۱۰=۱۰!$$

پس طبق نکتهٔ سؤال ۳۷ تعداد صفرهای سمت راست عدد !۱۰ برابر است با ۲؛ زیرا:

$$۱۰\,\big|\underline{۵}\;\;۲$$

روش دوم: در !۶ فقط یک جفت عامل ۲ و ۵ وجود دارد، پس یک صفر دارد و در !۷ نیز یک جفت عامل ۲ و ۵ وجود دارد، پس یک صفر دارد:

$$۶!\times۷!=\overline{\ldots۰}\times\overline{\ldots۰}=\overline{\ldots۰۰}$$

۴۲.گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{array}{l} ۲۰۰۰\div۳\simeq۶۶۶ \\ ۲۰۰۰\div۵=۴۰۰ \\ ۲۰۰۰\div۱۵\simeq۱۳۳ \text{ (تعداد عددهای مشترکی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیرند)} \end{array}\right\} \Rightarrow (\underbrace{۶۶۶+۴۰۰}_{۱۰۶۶})-۱۳۳=۹۳۳$$

۴۳.گزینهٔ «۲»

> **نکته** عددهایی بر ۸ بخش‌پذیرند که سه رقم سمت راستشان بر ۸ بخش‌پذیر باشد یا ۴ برابر صدگانشان به اضافهٔ ۲ برابر دهگانشان به اضافهٔ یکانشان عددی بخش‌پذیر بر ۸ شود.
>
> مثال: ۱۳۹۶۸ $\quad ۹۶۸\div۸=۱۲۱$ یا $\underbrace{۴\times۹}_{۳۶}+\underbrace{۲\times۶}_{۱۲}+۸=۵۶ \Rightarrow ۵۶\div۸=۷$

طبق نکتهٔ بالا کوچک‌ترین عدد شش‌رقمی بخش‌پذیر بر ۸ باید سه رقم سمت راستش صفر باشد، در نتیجه عدد ۱۰۰۰۰۰ عدد موردنظر است.

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰۰۰۰ & ۱۳ \\ \underline{-\;۹۱۰۰۰} & ۷۰۰۰ \\ ۹۰۰۰ & ۶۰۰ \\ \underline{-۷۸۰۰} & ۹۰ \\ ۱۲۰۰ & \underline{+\;۲} \\ \underline{-۱۱۷۰} & ۷۶۹۲ \\ ۳۰ & \\ \underline{-۲۶} & \\ ۴ & \end{array}$$

۴۴.گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ سؤال ۵۷ فصل ۱ داریم:

$$۱+۳+\cdots+۱۷۸۱=۸۹۱^۲$$

$$\text{تعداد}=\frac{۱۷۸۱-۱}{۲}+۱=\frac{۱۷۸۰}{۲}+۱=۸۹۰+۱=۸۹۱$$

مجموع رقم‌های ۸۹۱، عدد ۱۸ می‌شود که بر ۹ بخش‌پذیر است؛ بنابراین باقی‌مانده صفر است.

های آن

.

$۴(\underbrace{۷+۷+\cdots+}_{\text{۲۴۹۹تا}}$

$۴(\underbrace{۶+۹+۹+۷)}_{۳۱}$

انجام دهیم:

$۴\underbrace{(۱+۳)}_{۴}+۳=۱$

$(۳+۷+a+۸)\cdot$

ر خارج

ها به‌جز ۴تای اول

$۳۶۵ \mid ۷$

۵۲

$۱ \rightarrow$ روز

ست؛ پس:

$۷+۹۳+۵۷=۱$

$۱۵۷ \mid ۷$

$-۱۴۰ \quad ۲۰$

$+۲$

$۱۷ \quad ۲۲ \rightarrow$

-۱۴

$۳ \rightarrow$ روز

$۸۸۸۸ \mid ۹$

$-۸۱۰۰ \quad ۹۰۰$

۸۰

$۷۸۸ \quad +۷$

$-۷۲۰ \quad ۹۸۷$

۶۸

-۶۳

۵

۵۱. گزینهٔ «۳» از آنجایی که عدد داده‌شده صدرقمی است و رقم‌های آن ۱۰تا ۱۰تا تکراری است؛ بنابراین رقم‌های این عدد می‌تواند از ۰ تا ۹ باشد؛ پس:

$$\text{مجموع رقم‌ها} = ۱۰(\underbrace{۹+۸+۷+\cdots+۰}_{۴۵}) = ۴۵۰$$

عدد موردنظر به‌صورت مقابل است:

$$\underbrace{\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{۱۰}\underbrace{bb\ldots b}_{۱۰}\ldots\underbrace{jj\ldots j}_{۱۰}}}_{\text{۱۰۰ رقم}} \xrightarrow{\text{مجموع رقم‌ها}} ۱۰(a+b+\cdots+j)$$

مجموع رقم‌ها ۴۵۰ و بر ۹ بخش‌پذیر است؛ پس باقی‌مانده صفر است.

۵۲. گزینهٔ «۳» اگر عدد را x در نظر بگیریم، داریم:

$$۳x+۳=۱۸k \Rightarrow ۳(x+۱)=۱۸k \Rightarrow x+۱=۶k \Rightarrow x=۶k-۱$$

۵۳. گزینهٔ «۱»

نکته اگر عددی سه‌رقمی را دو بار کنار هم بنویسیم، عدد حاصل بر ۱۰۰۱ بخش‌پذیر می‌شود و چون ۱۰۰۱ بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است، هر عدد به‌صورت $\overline{abcabc}$ بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است.

با توجه به نکته چون حاصل تقسیم $\overline{abcabc}$ بر $۷\times۱۱\times۱۳=۱۰۰۱$ مساوی ۱۴۱ شده است، $k=۱۴۱۱۴۱$؛ در نتیجه: $۲k=۲۸۲۲۸۲$

۵۴. گزینهٔ «۱» اولین عدد چهاررقمی که بر ۴ بخش‌پذیر است، ولی بر ۶ بخش‌پذیر نیست عدد ۱۰۰۰ است و عددهای بعدی عبارت‌اند از:

$$۱۰۰۰, ۱۰۰۴, ۱۰۱۲, ۱۰۱۶, ۱۰۲۴, \ldots, ۹۹۸۰, ۹۹۸۸, ۹۹۹۲$$

برای اینکه بتوانیم تعداد این عددها را از فرمول تعداد که در فصل ۱ گفته شد به‌دست آوریم، این عددها را طوری مرتب می‌کنیم که بین آنها فاصلهٔ مشخصی وجود داشته باشد؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\text{الگوی اول: } ۱۰۰۰, ۱۰۱۲, ۱۰۲۴, \ldots, ۹۹۸۸ \Rightarrow \text{تعداد عددهای الگوی اول} = \dfrac{۹۹۸۸-۱۰۰۰}{۱۲}+۱=۷۴۹+۱=۷۵۰ \\ \text{الگوی دوم: } ۱۰۰۴, ۱۰۱۶, ۱۰۲۸, \ldots, ۹۹۹۲ \Rightarrow \text{تعداد عددهای الگوی دوم} = \dfrac{۹۹۹۲-۱۰۰۴}{۱۲}+۱=۷۴۹+۱=۷۵۰\end{array}\right\} \Rightarrow ۷۵۰\times۲=۱۵۰۰$$

۵۵. گزینهٔ «۲»

$$\overline{abc}-\overline{cba}=۱۰۰a+\cancel{۱۰b}+c-۱۰۰c-\cancel{۱۰b}-a=۹۹a-۹۹c \Rightarrow ۹۹\underbrace{(a-c)}_{k}=۹۹k$$

$$\text{شمارنده‌های طبیعی ۹۹} = ۱, ۳, ۹, ۱۱, ۳۳, ۹۹$$

۵۶. گزینهٔ «۲»

۳۰ عدد مضرب ۳ هستند. $۹۰\div۳=۳۰$

از این ۳۰ عدد ۶تا مضرب ۵ هستند. $۳۰\div۵=۶$

۲۴ عدد وجود دارد که مضرب ۳ باشد، ولی مضرب ۵ نباشد. $۳۰-۶=۲۴$

۵۷. گزینهٔ «۱»

نکته عددهایی بر ۲۵ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راستشان بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد.

پس با توجه به نکتهٔ بالا فقط عددهای سه‌رقمی ۳۲۵، ۲۵۰ و ۳۵۰ بر ۲۵ بخش‌پذیرند.

۵۸. گزینهٔ «۱»

$$۰!+۱!+۲!+۳!+۴!+۵!+\cdots+n!=۱+۱+۲+۶+۲۴+۱۲۰+\overline{\ldots۰}+\cdots+\overline{\ldots۰}=۳۴+۱۲۰+\overline{\ldots۰}=۳۴+\overline{\ldots۰}=\overline{\ldots۴}$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{\ldots۴} & ۱۰ \\ \cline{2-2} - & \ldots \\ \hline ۱ & \end{array}$$

۵۹.گزینهٔ «۲» با توجه به نکتهٔ سؤال ۵۳ همهٔ عددهایی که به‌صورت $\overline{abcabc}$ هستند، همواره بر ۱۱ بخش‌پذیرند.

۶۰.گزینهٔ «۳» طول چوب عددی زوج است؛ پس تعداد قطعات ۲۱سانتی‌متری نمی‌تواند فرد باشد. در نتیجه تعداد این قطعات می‌تواند ۲، ۴ یا ۶ باشد:

$$۲۱a+۱۴b=۱۲۶ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۶ \end{cases} , \begin{cases} a=۴ \\ b=۳ \end{cases} , \begin{cases} a=۶ \\ b=\text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس فقط به دو حالت می‌توان این چوب را برش زد.

نکته تعداد برش‌ها همیشه از تعداد قطعات ۱ واحد کمتر است.

طبق نکتهٔ بالا داریم: $۶=۱-(۴+۳)=$ تعداد برش‌های حالت دوم $\quad$ $۷=۱-(۶+۲)=$ تعداد برش‌های حالت اول

$۱۳=۷+۶=$ مجموع تعداد برش‌ها

۶۱.گزینهٔ «۱» بررسی سایر گزینه‌ها

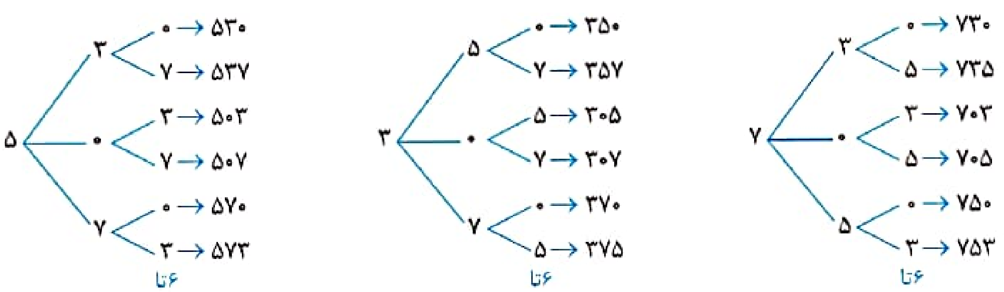
گزینهٔ ۲: عددهایی بر ۹ بخش‌پذیرند که مجموع رقم‌هایشان بر ۹ بخش‌پذیر باشد (زیرا اگر به عددی که مضرب ۹ است ۳ و ۷ را اضافه کنیم، دیگر مضرب ۹ نیست).

گزینه‌های ۳ و ۴: عددهایی بر ۱۸ بخش‌پذیرند که هم بر ۲ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشند و عددهایی بر ۲ بخش‌پذیرند که یکانشان زوج باشد؛ پس h عددی زوج است. $\overline{gh۸ne۸f۱}$ فرد و $\overline{۹mfehng}$ شاید زوج یا فرد باشد.

۶۲.گزینهٔ «۳» تعداد عددهای چهاررقمی به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید: $۹۹۹۹-۱۰۰۰+۱=۹۰۰۰$ یا $۹۹۹۹-۹۹۹=۹۰۰۰$

اگر عددی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش‌پذیر است: $۹۰۰۰ \div ۱۵=۶۰۰$

۶۳.گزینهٔ «۴»



بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ ۱: عددهای بخش‌پذیر بر ۱۰ عبارت‌اند از: ۷۵۰ , ۷۳۰ , ۳۷۰ , ۳۵۰ , ۵۷۰ , ۵۳۰

گزینهٔ ۲: عددهای بخش‌پذیر بر ۲ عبارت‌اند از: ۷۵۰ , ۷۳۰ , ۳۷۰ , ۳۵۰ , ۵۷۰ , ۵۳۰

گزینهٔ ۳: عددهای بخش‌پذیر بر ۳ عبارت‌اند از: ۷۵۳ , ۷۵۰ , ۷۰۵ , ۷۳۵ , ۳۷۵ , ۳۵۷ , ۵۷۳ , ۵۷۰ , ۵۰۷ , ۵۳۷

گزینهٔ ۴: عددهای بخش‌پذیر بر ۵ عبارت‌اند از: ۷۵۰ , ۷۰۵ , ۷۳۵ , ۷۳۰ , ۳۷۵ , ۳۷۰ , ۳۰۵ , ۳۵۰ , ۵۷۰ , ۵۳۰

۶۴.گزینهٔ «۲» می‌دانیم $۱۳۷۵۰=۵^۴\times۲\times۱۱$، همچنین می‌دانیم عددی بر $۶۲۵=۵^۴$ بخش‌پذیر است که چهار رقم سمت راستش بر ۶۲۵ بخش‌پذیر باشد. چون ۳۷۵۰ بر ۶۲۵ بخش‌پذیر است، $n=۷$ و $k=۰$ است و چون عدد حاصل بر ۱۱ بخش‌پذیر است، $m=۱$ است؛ بنابراین:

$$۳m-۲n+k=۳(۱)-۲(۷)+۰=۳-۱۴=-۱۱$$

۶۵.گزینهٔ «۳» چون $۱۸=۸+۳+۷$، پس a باید یا صفر باشد یا ۹ تا مجموع رقم‌هایش بر ۹ بخش‌پذیر شود. بنابراین اگر $a=۹$، گزینه‌های ۱ و ۲ درست نخواهند بود؛ اما گزینهٔ ۳ هم در حالت $a=۰$ و هم در حالت $a=۹$ درست است، زیرا:

$$۲+۰+۴+۶=۱۲$$
$$۲+۹+۴+۶=۲۱$$

می‌بینیم که مجموع رقم‌های هر دو آنها بر ۳ بخش‌پذیر است.

۶۶. گزینهٔ «۴»

$$\overline{abc}-\overline{cba}=100a+\cancel{10b}+c-100c-\cancel{10b}-a=99a-99c=99(a-c)=99k=33\underbrace{(3k)}_{k'}=33k'=\begin{cases}3\underbrace{(11k')}_{k''}=3k''\\11\underbrace{(3k')}_{k'''}=11k'''\end{cases}$$

۶۷. گزینهٔ «۱»

$$\left.\begin{array}{l}209=11\times19\\143=11\times13\end{array}\right\}\Rightarrow 209\times143=11^2\times19\times13$$

۶۸. گزینهٔ «۱»

یادآوری

عددهایی بر ۸ بخش‌پذیرند که سه رقم سمت راست آنها بر ۸ بخش‌پذیر باشد.

باید ببینیم چند عدد سه‌رقمی داریم که بر ۸ بخش‌پذیرند؛ پس تعداد عددهای سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۸ برابر است با:

$$\underset{\text{تعداد عددهای سه‌رقمی}}{\underset{\downarrow}{900}}\div 8\simeq 112$$

۶۹. گزینهٔ «۴» پنج عدد را به‌صورت d، c، b، a و e در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}a+b+c+d=24\\a+b+c+e=24\\a+b+d+e=24\\a+c+d+e=24\\b+c+d+e=24\end{array}\right\}\xrightarrow{+}4(a+b+c+d+e)=120\Rightarrow a+b+c+d+e=30$$

۷۰. گزینهٔ «۳»

نکته همهٔ عددهای فاکتوریل‌دار به‌جز !۰ و !۱ زوج‌اند.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$(\text{فرد})^{\text{فرد}}+(\text{فرد})^{\text{زوج}}+(\text{زوج})^{\text{زوج}}=\underbrace{\text{فرد}+\text{فرد}}_{\text{زوج}}+\text{زوج}=\text{زوج}$$

۷۱. گزینهٔ «۱» فقط عدد ۶ این ویژگی را دارد؛ زیرا:

$$\text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶}:1,2,3,6\Rightarrow \text{مجموع}=1+2+3=6$$

۷۲. گزینهٔ «۴»

$$a\,\underline{|\,b\,}\ \ c,\quad d\ \Rightarrow a=bc+d \qquad ①$$

$$a+nb\,\underline{|\,b\,}\ \ c+n,\quad x\ \Rightarrow a+nb=(c+n)b+x\Rightarrow a+nb=bc+bn+x \qquad ②$$

$$\xrightarrow{①,②}\underbrace{\cancel{bc}+d}_{a}+\cancel{nb}=\cancel{bc}+\cancel{bn}+x\Rightarrow d=x$$

۷۳. گزینهٔ «۱»

۴۰ = تعداد کل عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۴۱

عددهای اول کوچک‌تر از ۴۱ عبارت‌اند از:

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷

۱۲ = تعداد عددهای اول کوچک‌تر از ۴۱

$$\begin{array}{cc}12 & x\\40 & 100\end{array}\Rightarrow x=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}\times\overset{5}{\cancel{100}}}{\underset{2}{\cancel{40}}}=30\%$$

۷۴. گزینهٔ «۲» در صورتی حاصل جمع دو عدد طبیعی، فرد است که یکی از آنها زوج و دیگری فرد باشد. عدد ۲ تنها عدد اول زوج است؛ بنابراین:

$$\underbrace{x}_{\text{فرد}}+\underbrace{y}_{\text{زوج}}=\underbrace{129}_{\text{فرد}}\Rightarrow x+2=129\Rightarrow x=129-2\Rightarrow x=127$$

$$\text{اختلاف دو عدد}=127-2=125$$

۷۵. گزینهٔ «۴» ابتدا عددهای اولی را که مجموع آنها ۶۶ می‌شود می‌نویسیم:

$$29+37=66 \qquad 23+43=66 \qquad 13+53=66 \qquad 7+59=66 \qquad 5+61=66$$

اگر حاصل ضرب هر جفت از عددهای بالا را به‌دست آوریم، عدد ۷۳۷ به‌دست نمی‌آید.

۷۶. گزینهٔ «۳»

$$8(x-y)=808\Rightarrow x-y=\frac{808}{8}$$

$$\underbrace{x}_{\text{فرد}}-\underbrace{y}_{\text{زوج}}=\underbrace{101}_{\text{فرد}}\Rightarrow x-2=101\Rightarrow x=101+2\Rightarrow x=103$$

$$5(103+2)=5\times105=525$$

۷۷. گزینهٔ «۱» اگر تعداد عددهای اول کوچک‌تر از ۱۱۰، ۲۹تا باشد، پس تعداد عددهای مرکب کوچک‌تر از ۱۰۹ برابر با $108-28-\underbrace{1}_{\text{نه اول است، نه مرکب}}=79$ است (خود ۱۰۹ اول است، پس تعداد عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰۹، ۲۸تاست).

۷۸. گزینهٔ «۴»

$$\underbrace{x^3}_{\text{فرد}}+\underbrace{y^3}_{\text{زوج}}=\underbrace{1339}_{\text{فرد}}\Rightarrow x^3+2^3=1339\Rightarrow x^3+8=1339\Rightarrow x^3=1339-8\Rightarrow x^3=1331\Rightarrow x^3=11^3\Rightarrow x=11$$

$$x^2-y^2=11^2-2^2=121-4=117$$

۷۹. گزینهٔ «۲»

$$7(x^5-y^5)=1477\Rightarrow \underbrace{x^5}_{\text{فرد}}-\underbrace{y^5}_{\text{زوج}}=\underbrace{211}_{\text{فرد}}\xrightarrow{y=2}x^5-2^5=211$$

$$\Rightarrow x^5-32=211\Rightarrow x^5=211+32$$

$$\Rightarrow x^5=243$$

$$\Rightarrow x^5=3^5\Rightarrow x=3$$

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$2(3^2+2^2)=2(9+4)=2(13)=26$$

۸۰. گزینهٔ «۴»

$$\frac{x^2-y^2}{5}=33\Rightarrow \underbrace{x^2}_{\text{فرد}}-\underbrace{y^2}_{\text{زوج}}=\underbrace{165}_{\text{فرد}}\Rightarrow x^2-2^2=165\Rightarrow x^2-4=165\Rightarrow x^2=165+4\Rightarrow x^2=169\Rightarrow x^2=13^2\Rightarrow x=13$$

$$x+y=13+2=15$$

۸۱. گزینهٔ «۲»

نکته هر دو عدد اول متوالی که با هم ۲ واحد اختلاف دارند، عددهای اول دوقلو نام دارند، مانند (۵ , ۳) یا (۱۳ , ۱۱).

با توجه به نکتهٔ گفته‌شده داریم:

روش اول: $x+y=۲۱۶ \xrightarrow{y=x+۲} \underset{\text{اولین عدد}}{x} + \underbrace{x+۲}_{\text{دومین عدد}} = ۲۱۶ \Rightarrow ۲x+۲=۲۱۶ \Rightarrow x=۱۰۷ \Rightarrow x+۲=۱۰۷+۲=۱۰۹$

$x+y=۲۱۶ \Rightarrow$ میانگین x و y $= \frac{۲۱۶}{۲}=۱۰۸$

روش دوم: عدد کوچک‌تر، یک واحد از میانگین کمتر و عدد بزرگ‌تر یک واحد از میانگین بیشتر است:

$$x\,,۱۰۸\,,y \Rightarrow \begin{cases} x=۱۰۸-۱=۱۰۷ \\ y=۱۰۸+۱=۱۰۹ \end{cases}$$

۸۲.گزینهٔ «۲» $\frac{x+y}{۴}=۶۹ \Rightarrow x+y=۲۷۶$

روش اول: $y=x+۲ \Rightarrow x+x+۲=۲۷۶ \Rightarrow ۲x+۲=۲۷۶ \Rightarrow x=۱۳۷ \Rightarrow x+۲=۱۳۹$

روش دوم: میانگین x و y $=\frac{۲۷۶}{۲}=۱۳۸$

$$x\,,۱۳۸\,,y \Rightarrow \begin{cases} x=۱۳۸-۱=۱۳۷ \\ y=۱۳۸+۱=۱۳۹ \end{cases}$$

۸۳.گزینهٔ «۱»

نکته هر سه عدد اول فرد متوالی، عددهای اول سه‌قلو نام دارند که (۷ , ۵ , ۳) تنها سه‌قلو در بین این عددهاست.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم: $۳+۵+۷=۱۵$

۸۴.گزینهٔ «۱» بررسی گزاره‌ها

الف: مثالی از دو عدد اول متوالی، ۵ و ۳ است که مجموع آنها ۸ می‌شود و اول نیست؛ پس این گزاره نادرست است.

ب: عددهای اول سه‌قلو ۳، ۵ و ۷ هستند که حاصل ضربشان ۱۰۵ می‌شود و مجموع رقم‌هایش $۱+۰+۵=۶$ می‌شود که عددی زوج است، پس این گزاره درست است.

پ: عدد ۲ تنها عدد اول زوج است که اختلافش با هر عدد اول دیگری عددی فرد می‌شود، پس این گزاره نادرست است.

ت: بزرگ‌ترین مضرب اول هر عدد اول خود آن عدد است، پس این گزاره نادرست است.

۸۵.گزینهٔ «۴» بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ ۱: $(\text{زوج})^{\text{زوج}} + (\text{فرد})^{\text{زوج}} + ۱ = \underbrace{\text{زوج} + \text{فرد}}_{\text{فرد}} + ۱ = \text{زوج} \Rightarrow$ مرکب

گزینهٔ ۲: تعداد عددهای داخل پرانتز را محاسبه می‌کنیم: تعداد $=\frac{۹۱-۱۷}{۲}+۱=\frac{۷۴}{۲}+۱=۳۷+۱=۳۸$

$(۱۴۵^{۱۷}+۱۴۵^{۱۹}+\cdots+۱۴۵^{۹۱})+(\text{زوج})^{\text{زوج}}+\text{زوج} = \underbrace{(\cdots\overline{۵}+\cdots\overline{۵}+\cdots+\cdots\overline{۵})}_{\text{۳۸تا}}+\text{زوج}+\text{زوج}$

یکان حاصل جمع عددهای داخل پرانتز صفر است؛ زیرا $۳۸\times۵=۱۹۰$.

بنابراین: $\cdots\overline{۰}+\text{زوج}+\text{زوج}=\text{زوج}+\text{زوج}+\text{زوج}=\text{زوج} \Rightarrow$ مرکب

گزینهٔ ۳: یکان آن زوج است؛ بنابراین عددی مرکب است.

گزینهٔ ۴: $\frac{۸۱!^{۸۱!}}{۸۱!^{۸۱!}}+۱=۱+۱=۲$ عددی اول است $\Rightarrow$ غیرمرکب

۸۶.گزینهٔ «۴» اگر مجموع رقم‌های عددی ۳۶ شود، بر ۳ بخش‌پذیر است؛ لذا اول نیست.

۸۷. گزینهٔ «۱»

$۵۰۱! = ۱\times۲\times۳\times\cdots\times۵۰۱$

در نتیجه !۵۰۱ بر ۲، ۳، ۴، ... و ۵۰۱ بخش‌پذیر است؛ پس اگر به عددی که بر ۲، ۳، ۴، ... و ۵۰۱ بخش‌پذیر است ۲، ۳، ۴، ... و ۵۰۱ واحد اضافه شود، آن عدد باز هم بر ۲، ۳، ۴، ... و ۵۰۱ بخش‌پذیر است. بنابراین همهٔ این عددها مرکب‌اند. از طرفی ۵۰۱ عدد طبیعی از ۱ تا ۵۰۱ داریم، پس ۵۰۰ عدد طبیعی از ۲ تا ۵۰۱ وجود دارد.

۸۸. گزینهٔ «۴» توجه: همهٔ عددهای اول دورقمی فردند.

بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ ۱: می‌دانیم که هر عدد غیرصفر به توان صفر مساوی ۱ می‌شود، پس: $۱+۱=۲$ عددی اول است $\Rightarrow$ غیر مرکب

گزینهٔ ۲: $\text{زوج}+\text{فرد}^{\text{زوج}}+(\text{فرد}^{\text{زوج}}\times\text{فرد}^{\text{فرد}})+\text{فرد}^{\text{زوج}}=\text{زوج}+\underbrace{\text{فرد}+\underbrace{(\text{فرد}\times\text{فرد})}_{\text{فرد}}}_{\text{زوج}}+\underbrace{\text{فرد}+\text{فرد}}_{\text{زوج}}=\text{زوج}>۲\Rightarrow$ مرکب

گزینهٔ ۳: $۷n+۵n+۲n+۳n+n=۱۸n\Rightarrow$ مرکب (زیرا مضرب ۳ است)

۸۹. گزینهٔ «۴»

نکته اگر تعداد رقم‌های ۱ در عددهایی که فقط از ۱ تشکیل شده‌اند، زوج باشد، آن عددها بر ۱۱ بخش‌پذیرند.

۹۰. گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\text{تعداد}=\dfrac{۸۳-۵}{۶}+۱=\dfrac{۷۸}{۶}+۱=۱۳+۱=۱۴\\[2ex]\text{میانگین}=\dfrac{۵+۸۳}{۲}=\dfrac{۸۸}{۲}=۴۴\end{array}\right\}\Rightarrow \text{مجموع}=۴۴\times۱۴\Rightarrow \text{عددی زوج است.}$$

۹۱. گزینهٔ «۳»

$$\underset{\text{فرد}}{۲۸۰۷}=\underset{\text{زوج}}{۲}+\underset{\text{فرد}}{\overbrace{۲۸۰۵}^{\text{اول نیست}}}$$

به‌جز ۲، بقیهٔ عددهای اول فردند، پس حاصل جمع آنها هیچ‌گاه عددی فرد نمی‌شود.

۹۲. گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l}m=\text{تعداد عددهای از ۱ تا } m\\ n=\text{تعداد عددهای مرکب از ۱ تا } m\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد عددهای اول}=m-n-\underset{\text{نه اول است، نه مرکب}}{۱}$$

۹۳. گزینهٔ «۳»

۲۱۱۷۵۰	۲×۵
۲۱۱۷۵	۵
۴۲۳۵	۵
۸۴۷	۷
۱۲۱	۱۱
۱۱	۱۱
۱	

$\Rightarrow$ عامل‌های اول ۲۱۱۷۵۰ $=۲,۵,۷,۱۱$

۹۴. گزینهٔ «۱»

نکته برای پیدا کردن تعداد صفرهای سمت راست یک عدد فقط باید عددهایی را که عامل ۲ یا ۵ دارند تجزیه کرد.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۱۶^{۱۱}\times۹^{۱۷}\times۱۲۵^{۱۳}\times۴۹^{۷}\times۳۵^{۴}=(۲^{۴})^{۱۱}\times۹^{۱۷}\times(۵^{۳})^{۱۳}\times۴۹^{۷}\times(۵\times۷)^{۴}=۲^{۴۴}\times۹^{۱۷}\times۵^{۳۹}\times۴۹^{۷}\times۵^{۴}\times۷^{۴}$$

$$=۹^{۱۷}\times۴۹^{۷}\times۷^{۴}\times۲^{۴۴}\times۵^{۴۳}=۹^{۱۷}\times۴۹^{۷}\times۷^{۴}\times۲\times۲^{۴۳}\times۵^{۴۳}=\underbrace{۹^{۱۷}\times۴۹^{۷}\times۷^{۴}\times۲}_{A}\times۱۰^{۴۳}=A\underbrace{۰۰\ldots۰}_{\text{۴۳ رقم}}$$

با پیدا کردن مقدار A (در صورت امکان) می‌توان تعداد رقم‌های عدد را علاوه بر تعداد صفرهای سمت راست آن به‌دست آورد.

۹۵. گزینهٔ «۲»

۸۷۰	۲×۵
۸۷	۳
۲۹	۲۹
۱	

در نتیجه باید !k، عامل ۲۹ هم داشته باشد، پس کمترین مقدار برای k خود عدد ۲۹ است.

$$\frac{۲۹!}{۲\times۳\times۵\times۲۹}=\frac{۱\times\cancel{۲}\times\cancel{۳}\times۴\times\cancel{۵}\times\cdots\times\cancel{۲۹}}{\cancel{۲}\times\cancel{۳}\times\cancel{۵}\times\cancel{۲۹}}=۴\times۶\times۷\times\cdots\times۲۸$$

۹۶. گزینهٔ «۱» با تجزیهٔ عدد داده‌شده، داریم: $۶۱۴۴=۲^{۱۱}\times۳$

یعنی ۱۱ عامل ۲ داریم، پس باید عددی را انتخاب کنیم که بیشترین عامل ۵ را دارد. در نتیجه عددهای گزینه‌ها را تجزیه می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ ۲: $۱۸۷۵=۵^۴\times۳$ گزینهٔ ۱: $۹۳۷۵=۵^۵\times۳$

گزینهٔ ۴: $۲۲۵۲۸=۲^{۱۱}\times۱۱$ گزینهٔ ۳: $۶۷۲=۲^۵\times۳\times۷$

۹۷. گزینهٔ «۴»

۱۳۹۴	۲
۶۹۷	۱۷
۴۱	۴۱
۱	

$$\Rightarrow ۱۳۹۴=۲\times۱۷\times۴۱=\overset{\text{سن برادر کوچک‌تر}}{۳۴}\times\overset{\text{سن برادر بزرگ‌تر}}{۴۱}$$

سال تولد برادر بزرگ‌تر $=۱۳۹۴-۴۱=۱۳۵۳$

توجه: نمی‌توان سن برادر بزرگ‌تر را ۲×۴۱ و سن برادر کوچک‌تر را ۱۷ در نظر گرفت، چون در این صورت سن برادر بزرگ‌تر از سن پدرش بیشتر می‌شود.

۹۸. گزینهٔ «۳» ۹۳۷ عددی اول است، پس تنها حالتی که برای mn می‌توان در نظر گرفت، ۱×۹۳۷ است؛ بنابراین:

$$\frac{۹۳۷+۱}{۹۳۷-۱}=\frac{۹۳۸}{۹۳۶}=\frac{۴۶۹}{۴۶۸}$$

۹۹. گزینهٔ «۳» عدد ۲۰۰۰۰ را به عامل‌های اول آن تجزیه می‌کنیم:

۲۰۰۰۰	$۲\times۵\times۲\times۵\times۲\times۵\times۲\times۵$
۲	۲
۱	

$$\Rightarrow ۲۰۰۰۰=۲^۵\times۵^۴=۳۲\times۶۲۵$$

بنابراین این دو عدد را می‌توان $۳۲=۲^۵$ و $۶۲۵=۵^۴$ در نظر گرفت؛ پس: $۶۲۵-۳۲=۵۹۳$

۱۰۰. گزینهٔ «۴» برای حل این سؤال می‌توانیم مانند سؤال ۳۶ از تقسیم‌های متوالی عدد ۷۰ بر ۳ یا از قانون چبی‌شف کمک بگیریم:

۷۰ ÷ ۳ → ۲۳، ۲۳ ÷ ۳ → ۷، ۷ ÷ ۳ → ۲ $\Rightarrow ۲۳+۷+۲=۳۲$

۱۰۱. گزینهٔ «۴» عدد !۴۰ را می‌توان بر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱ و ۳۷ تقسیم کرد؛ پس ۱۲ عامل اول در عدد !۴۰ وجود دارد.

۱۰۲. گزینهٔ «۲» به ابتدای عبارت داده‌شده یک ۲ اضافه و در پایان یک عدد ۲ از آن کم می‌کنیم:

$$۲+۲^۲+۲^۳+\cdots+۲^۹=\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{۲+۲}_{۲^۲}+۲^۲}_{۲^۳}+۲^۳}_{۲^۴}+۲^۴}_{۲^۵}+\cdots+۲^۹}_{۲^{۱۰}}-۲=۲^{۱۰}-۲=۱۰۲۴-۲=۱۰۲۲$$

۱۰۲۲	۲
۵۱۱	۷
۷۳	۷۳
۱	

۱۰۳. گزینه «۱»

> **نکته**
> برای آنکه تعداد شمارنده‌های طبیعی عددی مانند n را تعیین کنیم، ابتدا آن را به عامل‌های اولش تجزیه می‌کنیم:
> $n=a^b\times c^d\times e^f\times\cdots$
> سپس تعداد شمارنده‌های آن را از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آوریم: تعداد شمارنده‌ها $=(b+1)(d+1)(f+1)\cdots$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{array}{r|l} 5400 & 2\times5\times2\times5 \\ 54 & 3 \\ 18 & 3 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 5400=2^3\times3^3\times5^2$$

$\Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های طبیعی ۵۴۰۰ $=4\times4\times3=48$

۱۰۴. گزینهٔ «۳» $\text{عدد}=a^1\times b^1\times c^1\times d^1\times e^{12}\xrightarrow{\text{یعنی}}2\times2\times3\times3\times13=2^2\times3^2\times13=468=$ تعداد شمارنده‌ها

۱۰۵. گزینهٔ «۳» عددی که مجذور کامل است، پایه‌اش اول و توانش زوج است؛ پس فرد = ۱ + زوج و در نتیجه فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند پاسخ باشد.

۱۰۶. گزینهٔ «۲» طبق نکتهٔ سؤال ۱۰۳ عددی که ۱۱ مقسوم‌علیه دارد، حتماً به‌صورت x^{10} است و برای چهاررقمی بودن آن باید، x مساوی ۲ باشد.

۱۰۷. گزینهٔ «۴» باید ببینیم عدد ۱۰۸ را حداکثر به‌صورت ضرب چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌توان نوشت:

$$108=2^2\times3^3=2\times2\times3\times3\times3\xrightarrow{\text{یعنی}}\text{عدد}=x\times y\times z^2\times t^2\times p^2$$

۱۰۸. گزینهٔ «۲»

> **نکته**
> اگر از تعداد شمارنده‌های اول یک عدد، تعداد شمارنده‌های طبیعی‌اش را کم کنیم، تعداد شمارنده‌های غیراول آن عدد به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{r|l} 7200 & 2\times5\times2\times5 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 7200=2^5\times3^2\times5^2$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم: تعداد شمارنده‌های طبیعی ۷۲۰۰ $=6\times3\times3=54\Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های غیراول ۷۲۰۰ $=54-3=51$

۱۰۹. گزینهٔ «۲»

$$(4ab)^{m+2}(9c)^{n-1}=(2^2\times ab)^{m+2}(3^2c)^{n-1}=2^{2m+4}a^{m+2}b^{m+2}3^{2n-2}c^{n-1}$$

تعداد شمارنده‌های طبیعی $=(2m+5)(m+3)(m+3)(2n-1)n=(2m+5)(m+3)^2(2n-1)n$

۱۱۰. گزینهٔ «۱»

> **نکته** اگر از تعداد شمارنده‌های طبیعی یک عدد تعداد شمارنده‌های اول و عدد ۱ (که نه اول است، نه مرکب) را کم کنیم، تعداد شمارنده‌های مرکب آن عدد به‌دست می‌آید.

$$۷۲\times۶۳\times۸۱=۲^{۳}\times۳^{۲}\times۳^{۲}\times۷\times۳^{۴}=۲^{۳}\times۳^{۸}\times۷$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\text{تعداد کل شمارنده‌های طبیعی}=۴\times۹\times۲=۷۲\Rightarrow\text{تعداد شمارنده‌های مرکب}=۷۲-\underbrace{۳}_{\text{شمارندهٔ اول}}-\overbrace{۱}^{\text{نه اول است، نه مرکب}}=۶۸$$

۱۱۱. گزینهٔ «۳»

> **نکته** برای پیدا کردن تعداد شمارنده‌های فرد یک عدد باید در رابطهٔ داده‌شده در نکتهٔ سؤال ۱۰۳ فقط از عامل‌های اول فرد استفاده کنیم.

$$۴۹\times۱۲۰\times۴۲=۷^{۲}\times۳\times۵\times۲^{۳}\times۲\times۳\times۷=۲^{۴}\times\underbrace{۳^{۲}\times۵\times۷^{۳}}_{\text{عامل‌های اول فرد}}$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\text{تعداد شمارنده‌های فرد}=۳\times۲\times۴=۲۴$$

۱۱۲. گزینهٔ «۲»

> **نکته** برای پیدا کردن تعداد شمارنده‌های زوج یک عدد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:
>
> تعداد شمارنده‌های فرد − تعداد کل شمارنده‌های طبیعی = تعداد شمارنده‌های زوج

$$۷۵۰۰\times۹۹=۲^{۲}\times۵^{۴}\times۳\times۳^{۲}\times۱۱=۲^{۲}\times۳^{۳}\times۵^{۴}\times۱۱$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{تعداد کل شمارنده‌های طبیعی}=۳\times۴\times۵\times۲=۱۲۰\\ \text{تعداد شمارنده‌های فرد}=۴\times۵\times۲=۴۰\end{array}\right\}\Rightarrow\text{تعداد شمارنده‌های زوج}=۱۲۰-۴۰=۸۰$$

۱۱۳. گزینهٔ «۴»

> **نکته** برای پیدا کردن مجموع شمارنده‌های یک عدد مانند n داریم: $n=a^{b}\times c^{d}\times e^{f}\times\cdots$
>
> $$\text{مجموع شمارنده‌های طبیعی عدد } n=\frac{a^{b+1}-۱}{a-۱}\times\frac{c^{d+1}-۱}{c-۱}\times\frac{e^{f+1}-۱}{e-۱}\times\cdots$$

۲۴۱۹۲۰۰	۲×۵×۲×۵
۲۴۱۹۲	۲
۱۲۰۹۶	۲
۶۰۴۸	۲
۳۰۲۴	۲
۱۵۱۲	۲
۷۵۶	۲
۳۷۸	۲
۱۸۹	۱۷
۱۷	۱۷
۱	

$$\Rightarrow ۲۴۱۹۲۰۰=۲^{۹}\times۵^{۲}\times۱۷^{۲}$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\text{مجموع شمارنده‌ها}=\frac{۲^{۱۰}-۱}{۲-۱}\times\frac{۵^{۳}-۱}{۵-۱}\times\frac{۱۷^{۳}-۱}{۱۷-۱}=\frac{۱۰۲۴-۱}{۱}\times\frac{۱۲۵-۱}{۴}\times\frac{۴۹۱۳-۱}{۱۶}=\frac{۱۰۲۳}{۱}\times\frac{۱۲۴}{۴}\times\frac{۴۹۱۲}{۱۶}=۱۰۲۳\times۳۱\times۳۰۷$$

۱۱۴. گزینهٔ «۲» $۴۲^{۴۹}=(۲\times۳\times۷)^{۴۹}=۲^{۴۹}\times۳^{۴۹}\times۷^{۴۹}\Rightarrow$ تعداد شمارنده‌ها $=۵۰\times۵۰\times۵۰=۵۰^{۳}$

۱۱۵. گزینهٔ «۲»

نکته اگر تعداد شمارنده‌های عددی، عدد اول باشد، آن عدد بیشتر از یک عامل اول ندارد.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

در اینجا عددی که ۱۱ شمارنده دارد حتماً به‌صورت $a^{۱۰}$ است: $n=a^{۱۰}\Rightarrow n^{۳}=a^{۳۰}\Rightarrow$ تعداد شمارنده‌ها $=۳۱$

۱۱۶. گزینهٔ «۳»

$۱۵\left|\frac{۲}{۷}\right.\quad ۱۵\left|\frac{۴}{۳}\right.\quad ۱۵\left|\frac{۸}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۲ $=۷+۳+۱=۱۱$

$۱۵\left|\frac{۳}{۵}\right.\quad ۱۵\left|\frac{۹}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۳ $=۵+۱=۶$

$۱۵\left|\frac{۵}{۳}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۵ $=۳$

$۱۵\left|\frac{۷}{۲}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۷ $=۲$

$۱۵\left|\frac{۱۱}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۱۱ $=۱$

$۱۵\left|\frac{۱۳}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۱۳ $=۱$

$\Rightarrow ۱۵!=۲^{۱۱}\times۳^{۶}\times۵^{۳}\times۷^{۲}\times۱۱\times۱۳$

تعداد شمارنده‌های طبیعی !۱۵ $=۱۲\times۷\times۴\times۳\times۲\times۲=۴۰۳۲$

۱۱۷. گزینهٔ «۴»

$۱۲\left|\frac{۲}{۶}\right.\quad ۱۲\left|\frac{۴}{۳}\right.\quad ۱۲\left|\frac{۸}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۲ $=۶+۳+۱=۱۰$

$۱۲\left|\frac{۳}{۴}\right.\quad ۱۲\left|\frac{۹}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۳ $=۴+۱=۵$

$۱۲\left|\frac{۵}{۲}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۵ $=۲$

$۱۲\left|\frac{۷}{۱}\right.\Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۷ $=۱$

$\Rightarrow ۱۲!=۲^{۱۰}\times۳^{۵}\times۵^{۲}\times۷$

تعداد کل شمارنده‌های طبیعی $=۱۱\times۶\times۳\times۲=۳۹۶$

تعداد شمارنده‌های فرد $=۶\times۳\times۲=۳۶$

$\Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های زوج $=۳۹۶-۳۶=۳۶۰$

۱۱۸. گزینهٔ «۳»

$۷^{۵۰۱}(۱+۷+۷^{۲})=۷^{۵۰۱}\times۵۷=۷^{۵۰۱}\times۱۹\times۳$

تعداد شمارنده‌های طبیعی $=۵۰۲\times۲\times۲=۲۰۰۸$

۱۱۹. گزینهٔ «۳» $۱۶^{۲}\times۱۲۵^{۹}\times۱۱=۲^{۸}\times۵^{۲۷}\times۱۱$

برای اینکه شمارنده‌های عدد داده‌شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد، وجود حداقل یک ۵ الزامی است، همهٔ حالت‌های $۵^{۱}$، $۵^{۲}$، … و $۵^{۲۷}$ را در نظر می‌گیریم. از این به بعد خیالمان راحت است و همهٔ حالت‌های $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، … و $۲^{۸}$ و همهٔ حالت‌های $۱۱^{۰}$ و ۱۱ را نیز در نظر می‌گیریم؛ پس تعداد شمارنده‌های طبیعی بخش‌پذیر بر ۵ برابر است با: $۲۷\times۹\times۲=۴۸۶$

۱۲۰. گزینهٔ «۲» $۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$

$۲۴^۳ \times ۵۰^۲ \times ۷ = ۲^{۱۱} \times ۳^۳ \times ۵^۴ \times ۷$

پس وجود حداقل یکی ۵، یکی ۳ و یکی ۲ الزامی است:

$$\underset{\text{از } ۲^۱ \text{ تا } ۲^{۱۱}}{۱۱} \times \underset{\text{از } ۳^۱ \text{ تا } ۳^۳}{۳} \times \underset{\text{از } ۵^۱ \text{ تا } ۵^۴}{۴} \times \underset{۷^۱ , ۷^۰}{۲} = ۲۶۴$$

۱۲۱. گزینهٔ «۱»

$۹ \,|\, \frac{۸}{۱} \quad ۹ \,|\, \frac{۴}{۲} \quad ۹ \,|\, \frac{۲}{۴} \Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۲ $= ۴+۲+۱ = ۷$

$۹ \,|\, \frac{۹}{۱} \quad ۹ \,|\, \frac{۳}{۳} \Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۳ $= ۳+۱ = ۴$

$۹ \,|\, \frac{۵}{۱} \Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۵ $= ۱$

$۹ \,|\, \frac{۷}{۱} \Rightarrow$ تعداد عامل‌های ۷ $= ۱$

$\Rightarrow ۹! = ۲^۷ \times ۳^۴ \times ۵ \times ۷$

مجموع شماره‌های طبیعی $= \frac{۲^۸-۱}{۲-۱} \times \frac{۳^۵-۱}{۳-۱} \times \frac{۵^۲-۱}{۵-۱} \times \frac{۷^۲-۱}{۷-۱} = \frac{۲۵۵}{۱} \times \frac{۲۴۲}{۲} \times \frac{۲۴}{۴} \times \frac{۴۸}{۶} = ۲۵۵ \times ۱۲۱ \times ۶ \times ۸ = ۲۵۵ \times ۱۲۱ \times ۴۸$

۱۲۲. گزینهٔ «۲»

نکته برای به‌دست آوردن مجموع معکوس شمارنده‌های طبیعی یک عدد مجموع شمارنده‌هایش را بر آن عدد تقسیم می‌کنیم: $\frac{\text{مجموع شمارنده‌های عدد}}{\text{عدد}}$

$۱۵۰ = ۵^۲ \times ۲ \times ۳ \Rightarrow$ مجموع شمارنده‌های طبیعی ۱۵۰ $= \frac{۵^۳-۱}{۵-۱} \times \frac{۲^۲-۱}{۲-۱} \times \frac{۳^۲-۱}{۳-۱} = ۳۱ \times ۳ \times ۴ = ۳۷۲$

با توجه به نکته داریم: مجموع معکوس شمارنده‌های طبیعی ۱۵۰ $= \frac{۳۷۲}{۱۵۰} = \frac{۶۲}{۲۵}$

۱۲۳. گزینهٔ «۲»

$۴^{m+۳} \times ۱۲۵^{m-۱} = (۲^۲)^{m+۳} \times (۵^۳)^{m-۱} = ۲^{۲m+۶} \times ۵^{۳m-۳}$

تعداد شمارنده‌های طبیعی $= (۲m+۷)(۳m-۲)$

۱۲۴. گزینهٔ «۳»

نکته حاصل ضرب شمارنده‌های طبیعی یک عدد برابر با خود عدد به توان نصف تعداد شمارنده‌های طبیعی‌اش است: $(\text{خود عدد})^{(\frac{\text{تعداد شمارنده‌ها}}{۲})}$

$۱۰۰ = ۲^۲ \times ۵^۲ \Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های طبیعی $= ۳ \times ۳ = ۹$

طبق نکتهٔ بالا داریم: حاصل ضرب شمارنده‌های طبیعی $= ۱۰۰^{(\frac{۹}{۲})} = (۱۰^۲)^{\frac{۹}{۲}} = ۱۰^۹$

۱۲۵. گزینهٔ «۱» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم: $۲۵۰^۳ = (۵^۳ \times ۲)^۳ = ۵^۹ \times ۲^۳$

تعداد شمارنده‌ها $= ۱۰ \times ۴ = ۴۰ \Rightarrow$ حاصل ضرب شمارنده‌ها $= (۲۵۰^۳)^{\frac{۴۰}{۲}} = (۲۵۰^۳)^{۲۰} = ۲۵۰^{۶۰}$

۱۲۶. گزینهٔ «۲» اگر عدد $\overline{abab}$ را به‌صورت ناقص بسط دهیم، داریم: $\overline{abab} = ۱۰۰\overline{ab} + \overline{ab} = ۱۰۱\overline{ab}$

۱۰۱ عددی اول است، پس $\overline{ab}$ هم باید عددی اول باشد (تا حاصل ۴ شمارنده داشته باشد) و از آنجایی که دنبال بزرگ‌ترین مقدار ممکن هستیم، باید $\overline{ab} = ۹۷$. در نتیجه: $\overline{abab} = ۹۷۹۷$

۱۲۷. گزینهٔ «۲» $۱۲! = ۲\times۳\times۲^۲\times۵\times۲\times۳\times۷\times۲^۳\times۳^۲\times۲\times۵\times۱۱\times۲^۲\times۳ = ۲^{۱۰}\times۳^۵\times۵^۲\times۷\times۱۱$

چون وجود حداقل یک ۵ الزامی است، همهٔ حالت‌های $۵^۱$ و $۵^۲$، همهٔ حالت‌های $۲^۰، ۲^۱، \ldots$ و $۲^{۱۰}$، همهٔ حالت‌های $۳^۰، ۳^۱، \ldots$ و $۳^۵$، همهٔ حالت‌های $۷^۰$ و $۷^۱$ و همهٔ حالت‌های $۱۱^۰$ و $۱۱^۱$ را در نظر می‌گیریم:

تعداد شمارنده‌های طبیعی مضرب ۵ $= ۲\times۱۱\times۶\times۲\times۲ = ۵۲۸$

۱۲۸. گزینهٔ «۱»

> **نکته** برای به‌دست آوردن حاصل ضرب شمارنده‌های صحیح یک عدد، قرینهٔ عدد را به توان تعداد شمارنده‌های طبیعی‌اش می‌رسانیم: $(\text{قرینهٔ عدد})^{\text{تعداد شمارنده‌های طبیعی}}$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$۱۲۵ = ۵^۳ \Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های طبیعی $= ۳+۱ = ۴$

حاصل ضرب شمارنده‌های صحیح عدد ۱۲۵ $= (-۱۲۵)^۴ = ۱۲۵^۴ = (۵^۳)^۴ = ۵^{۱۲}$

۱۲۹. گزینهٔ «۳» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$۱۶^{۳^۴} = (۲^۴)^{۸۱} = ۲^{۳۲۴} \Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های طبیعی $= ۳۲۴+۱ = ۳۲۵$

حاصل ضرب شمارنده‌های صحیح عدد $۱۶^{۳^۴}$ $= (-۲^{۳۲۴})^{۳۲۵} = -۲^{۳۲۴\times۳۲۵}$

۱۳۰. گزینهٔ «۱» تعداد شمارنده‌های طبیعی $۳^{m+۲}$ $= m+۳$

طبق نکتهٔ سؤال ۱۲۴ داریم:

حاصل ضرب شمارنده‌های طبیعی $۳^{m+۲}$ $= (۳^{m+۲})^{\frac{m+۳}{۲}} = ۹^{۱۴} \Rightarrow ۳^{\frac{(m+۲)(m+۳)}{۲}} = ۳^{۲۸} \Rightarrow (m+۲)(m+۳) = ۵۶ \Rightarrow m = ۵$

$\Rightarrow \frac{۲m-۱}{m} = \frac{۲(۵)-۱}{۵} = \frac{۹}{۵} = ۱\frac{۴}{۵} = ۱/۸$

۱۳۱. گزینهٔ «۳»

> **نکته** برای به‌دست آوردن ب.م.م عددها ابتدا آنها را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل ضرب عامل‌های مشترک با توان کمتر را به عنوان ب.م.م انتخاب می‌کنیم.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{array}{r|l}۶۳۰ & ۲\times۵\\ ۶۳ & ۳^۲\times۷\\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۶۳۰ = ۲\times۳^۲\times۵\times۷\\[2em] \begin{array}{r|l}۴۰۰ & ۲^۲\times۵^۲\\ ۴ & ۲^۲\\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۴۰۰ = ۲^۴\times۵^۲\end{array}\right\} \Rightarrow (۶۳۰, ۴۰۰) = ۲\times۵ = ۱۰$$

۱۳۲. گزینهٔ «۳»

۱۲۱ → ۱۱ ، ۱۱

۱۲۳۴۳۲۱ → ۱۱۱۱ ، ۱۱۱۱؛ ۱۱۱۱ → ۱۱ ، ۱۰۱؛ ۱۱۱۱ → ۱۱ ، ۱۰۱

$۱۱\times۱۱ = ۱۲۱$

$۱۱۱۱\times۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۳۲۱$

با توجه به نکتهٔ سؤال ۸۹ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}۱۲۳۴۳۲۱ = ۱۱^۲\times۱۰۱^۲\\ ۱۲۱ = ۱۱^۲\end{array}\right\} \Rightarrow (۱۲۳۴۳۲۱, ۱۲۱) = ۱۱^۲ = ۱۲۱$$ سه‌رقمی

۱۳۳. گزینهٔ «۲»

$۶/۳$ متر $= ۶/۳\times ۱۰$ دسی‌متر $= ۶۳$ دسی‌متر

$۳/۶$ متر $= ۳/۶\times ۱۰$ دسی‌متر $= ۳۶$ دسی‌متر

$$\left.\begin{array}{l} ۳۶ = ۲^۲\times ۳^۲ \\ ۶۳ = ۳^۲\times ۷ \\ ۲۴ = ۲^۳\times ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow (۳۶\,,۶۳\,,۲۴) = ۳$$

$$\text{تعداد جعبه‌های کوچک} = \frac{\overset{۱۲}{\cancel{۳۶}}\times \overset{۲۱}{\cancel{۶۳}}\times \overset{۸}{\cancel{۲۴}}}{\cancel{۳}\times\cancel{۳}\times\cancel{۳}} = ۲۰۱۶$$

۱۳۴. گزینهٔ «۳» عدد ۶ شمارندهٔ ۴۵ نیست؛ پس نمی‌تواند شمارندهٔ مشترک دو عدد موردنظر باشد.

۱۳۵. گزینهٔ «۲»

> **نکته** دو عدد a و b نسبت به هم اول یا متباین‌اند درصورتی که $(a\,,b) = ۱$. لازم به ذکر است که دو عددی که نسبت به هم اول‌اند، حتماً نباید خودشان عددهایی اول باشند؛ بلکه می‌توانند هر دو عددهایی اول مانند ۳ و ۵، هر دو عددهایی مرکب مانند ۵۱ و ۹۴ یا یکی اول و دیگری مرکب مانند ۱۵ و ۱۷ باشند.

با توجه به نکتهٔ بالا هر دو عدد ۲۲۳ و ۲۲۷ در گزینهٔ ۲ اول‌اند؛ پس: $(۲۲۳,۲۲۷) = ۱$

۱۳۶. گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ سؤال ۱۳۱، عامل مشترک با کمترین توان، $a^۲$ است.

۱۳۷. گزینهٔ «۴» ب.م.م دو عدد متباین، ۱ است، پس نباید در تجزیهٔ آنها پایهٔ مشترک وجود داشته باشد؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۲m+۳=۰ \Rightarrow ۲m=-۳ \Rightarrow m=\dfrac{-۳}{۲} \\ ۲m+۳n=۰ \Rightarrow ۲(\dfrac{-۳}{۲})+۳n=۰ \Rightarrow -۳+۳n=۰ \Rightarrow ۳n=۳ \Rightarrow n=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{۱}{-\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}$$

۱۳۸. گزینهٔ «۱» $(m\,,n) = a \Rightarrow (km\,,kn) = k(m\,,n) = ka$

۱۳۹. گزینهٔ «۱» $(a\,,b) = ۷ \Rightarrow (\frac{a}{۷}\,,\frac{b}{۷}) = ۱$

$$a+b = ۸۴ \xrightarrow{\div ۷} \frac{a}{۷}+\frac{b}{۷} = ۱۲$$

$\Rightarrow \frac{a}{۷}\,,\frac{b}{۷} = ۱,۱۱$ یا $۵,۷$

بنابراین ۴ جفت عدد $(۴۹\,,۳۵)\,,(۳۵\,,۴۹)\,,(۷۷\,,۷)\,,(۷\,,۷۷)$ در شرط‌های داده‌شده صدق می‌کنند.

۱۴۰. گزینهٔ «۳» اگر دو عدد را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم، ب.م.م عددهای حاصل، ۱ می‌شود. از بین گزینه‌های داده‌شده فقط ب.م.م دو عدد ۸ و ۹ برابر ۱ است. $(۹\,,۸) = ۱$

۱۴۱. گزینهٔ «۱»

$$\frac{(k^۵,k^۹)}{(k^۴,k^۴p)} = \frac{k^۵}{k^۴} = k$$

۱۴۲. گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l} ۱۴۴ = ۲^۴\times ۳^۲ \\ ۹۶ = ۲^۵\times ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow (۱۴۴\,,۹۶) = ۲^۴\times ۳ = ۱۶\times ۳ = ۴۸$$

۱۴۳. گزینهٔ «۴»

> **نکته** اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، آنگاه: $(a\,,b) = b$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$(\underbrace{۱۱...۱۱۱}_{۲۰۰\text{رقم}}\,,\underbrace{۱۱\cdots۱۱۱}_{۲۰\text{رقم}}) = \underbrace{۱۱\cdots۱۱۱}_{۲۰\text{رقم}}$$

۱۴۴. گزینهٔ «۱» باقی‌ماندهٔ تقسیم چهار عدد داده‌شده بر F مساوی ۱ است، پس یک واحد کمتر از عددهای داده‌شده بر F بخش‌پذیر است:

$$\left.\begin{array}{l} ۲۷۰۲-۱=۲۷۰۱ \Rightarrow ۲۷۰۱=۳۷\times ۷۳ \\ ۱۶۸۰-۱=۱۶۷۹ \Rightarrow ۱۶۷۹=۲۳\times ۷۳ \\ ۱۳۸۸-۱=۱۳۸۷ \Rightarrow ۱۳۸۷=۱۹\times ۷۳ \\ ۹۵۰-۱=۹۴۹ \Rightarrow ۹۴۹=۱۳\times ۷۳ \end{array}\right\} \Rightarrow (۲۷۰۱, ۱۶۷۹, ۱۳۸۷, ۹۴۹)=۷۳=F$$

۱۴۵. گزینهٔ «۱» فقط گزارهٔ پ درست است.

بررسی سایر گزاره‌ها

الف: نادرست است (زیرا برای مثال عدد ۵۹ یکی از مضرب‌های طبیعی ۵۹ است و مرکب نیست).

ب: نادرست است (زیرا ک.م.م دو عدد متوالی با حاصل ضرب آنها مساوی است).

ت: نادرست است (زیرا کوچک‌ترین مضرب مشترک همهٔ عددهای طبیعی برابر ک.م.م آنهاست که قطعاً ۱ نیست).

۱۴۶. گزینهٔ «۲»

نکته

- برای پیدا کردن ک.م.م عددها ابتدا آنها را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم؛ سپس عامل‌های مشترک و غیرمشترک آنها با توان بیشتر را در هم ضرب می‌کنیم.
- در حالت کلی $[a , b]=\dfrac{a\times b}{(a , b)}$؛ در نتیجه ک.م.م دو عدد متباین با حاصل ضرب آنها برابر است.

$$(۲^{۳۰۰} , ۳^{۲۰۰})=۱ \xrightarrow{\text{طبق نکتهٔ بالا}} [۲^{۳۰۰} , ۳^{۲۰۰}]=۲^{۳۰۰}\times ۳^{۲۰۰}=(۲^{۳})^{۱۰۰}\times(۳^{۲})^{۱۰۰}=۸^{۱۰۰}\times ۹^{۱۰۰}=۷۲^{۱۰۰}$$

۱۴۷. گزینهٔ «۳»

$[a , b , c]=k \qquad [ma , mb , mc]=m[a , b , c]=mk$

۱۴۸. گزینهٔ «۳»

نکته

- اگر $a>b$، آنگاه !a بر !b بخش‌پذیر است.
- ک.م.م دو عدد بخش‌پذیر بر هم، عدد بزرگ‌تر است.

!۹ بر !۸ بخش‌پذیر است و طبق نکتهٔ بالا داریم: $[۸!, ۹!]=۹!$

۱۴۹. گزینهٔ «۴» باید باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی بر ک.م.م عددهای ۹۰، ۶۳ و ۷۲ برابر ۱۹ شود؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۹۰=۲\times ۳^{۲}\times ۵ \\ ۶۳=۳^{۲}\times ۷ \\ ۷۲=۲^{۳}\times ۳^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow [۹۰,۶۳,۷۲]=۲^{۳}\times ۳^{۲}\times ۵\times ۷=۸\times ۹\times ۵\times ۷=۲۵۲۰$$

$$\underset{\uparrow \\ \text{بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی}}{۹۹۹۹}\div ۲۵۲۰ \simeq ۳ \Rightarrow ۲۵۲۰\times ۳=۷۵۶۰ \Rightarrow ۷۵۶۰+۱۹=۷۵۷۹$$

۱۵۰. گزینهٔ «۲»

$$[۳, ۵, ۱۱, ۸]=۳\times ۵\times ۱۱\times ۸=۱۳۲۰ \Rightarrow ۱۳۲۰+\overset{\text{تعداد بشقاب‌های اضافه}}{۲}=۱۳۲۲$$

۱۵۱. گزینهٔ «۲» با توجه به تعریف ک.م.م و تجزیهٔ ۲۷۰ به عامل‌های اول باید m و n را طوری مشخص کنیم که مجموع آنها ۹۹ شود؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l}۲۷۰ = ۲\times ۳^{۳}\times ۵ = ۲\times ۳\times ۳\times ۳\times ۵\\ \left.\begin{array}{l} m = ۳\times ۳\times ۳\times ۲ = ۵۴\\ n = ۳\times ۳\times ۵ = ۴۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۵۴+۴۵=۹۹\end{array}\right\}\Rightarrow [۵۴\,,۴۵] = ۳^{۳}\times ۲\times ۵ = ۲۷۰$$

$$\Rightarrow m-n = ۵۴-۴۵ = ۹$$

۱۵۲. گزینهٔ «۱» بررسی گزینه‌ها

با در نظر گرفتن عددهای گزینه‌ها برای a و b داریم:

گزینهٔ ۱: $\left.\begin{array}{l}b=۱۱\\ a=۱۲\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{۳۶ < ۳۶\times ۱۱}{[۳۶,۱۲] < [۳۶,۱۱]}$ ✓

گزینهٔ ۲: $\left.\begin{array}{l}b=۶\\ a=۸\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{۷۲ \not< ۳۶}{[۳۶,۸] \not< [۳۶,۶]}$ ×

گزینهٔ ۳: $\left.\begin{array}{l}b=۹\\ a=۴\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{۳۶ \not< ۳۶}{[۳۶,۴] < [۳۶,۹]}$ ×

گزینهٔ ۴: $\left.\begin{array}{l}b=۱۲\\ a=۱۰\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{۱۸۰ \not< ۳۶}{[۳۶,۱۰] \not< [۳۶,۱۲]}$ ×

۱۵۳. گزینهٔ «۱»

$$P = \frac{a^{۲}m^{۳}n^{۲}b}{m^{۲}b^{۳}an} = \frac{amn}{b^{۲}}$$

۱۵۴. گزینهٔ «۲»

یادآوری

رابطهٔ بین ب.م.م و ک.م.م دو عدد a و b به‌صورت مقابل است: $(a\,,b)\times[a\,,b] = ab$ یا $[a\,,b] = \frac{ab}{(a\,,b)}$

طبق یادآوری بالا داریم:

$$۱۷\times ۳۴۰ = ۶۸\times b \Rightarrow b = \frac{۱۷\times \cancel{۳۴}^{\,۵}}{\cancel{۶۸}} = ۸۵$$

۱۵۵. گزینهٔ «۴»

$$۲۴ = ۲^{۳}\times ۳ \qquad ۵۶ = ۲^{۳}\times ۷ \qquad ۸۸ = ۲^{۳}\times ۱۱ \qquad ۱۱۲ = ۲^{۴}\times ۷$$

$$\left.\begin{array}{l}[۲۴\,,۵۶\,,۸۸\,,۱۱۲] = ۲^{۴}\times ۷\times ۳\times ۱۱\\ (۲۴\,,۵۶\,,۸۸\,,۱۱۲) = ۲^{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{عامل‌های غیرمشترک} = ۷\,,۳\,,۱۱$$

۱۵۶. گزینهٔ «۱» طبق یادآوری سؤال ۱۵۴ داریم:

$$۱۵\times ۴۵۰ = mn$$

۱۵۷. گزینهٔ «۴»

$$K = \frac{[(c\,,d)\,,b]}{([a\,,c]\,,b)} = \frac{[d\,,b]}{(a\,,b)} = \frac{b}{b} = ۱$$

۱۵۸. گزینهٔ «۳» طبق یادآوری سؤال ۱۵۴:

$$mn = ۸\times ۵۶۰$$

از طرفی مساحت مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های قائم m و n برابر است با:

$$\frac{mn}{۲} = \frac{۵۶۰\times \cancel{۸}^{\,۴}}{\cancel{۲}} = ۲۲۴۰$$

۱۵۹. گزینهٔ «۲»

$$(۷۷a\,,۹۹a) = ۴۴ \Rightarrow (۷\times ۱۱\times a\,,۳^{۲}\times ۱۱\times a) = ۴۴ \Rightarrow ۱۱\times a = ۴۴ \Rightarrow a = \frac{۴۴}{۱۱} \Rightarrow a = ۴$$

$$[۹۵a\,,۵۷a] = [۹۵\times ۴\,,۵۷\times ۴] = [۱۹\times ۵\times ۲^{۲}\,,۱۹\times ۳\times ۲^{۲}] = ۱۹\times ۲^{۲}\times ۳\times ۵ = ۱۹\times ۴\times ۳\times ۵ = ۱۹\times ۶۰$$

۱۶۰. گزینهٔ «۴» می‌دانیم که در روش غربال اوّلین عددی که خط می‌خورد ۱ است، سپس مضارب ۲ به‌جز ۲ خط می‌خورند و ... ؛ در غربال ۱ تا ۶۰۰، سیصدمین عددی که خط می‌خورد خود ۶۰۰ است؛ در نتیجه دویستمین عددی هم که خط می‌خورد جزء مضرب‌های ۲ است که برابر با نودونهمین عدد الگوی $۴,۶,۸,۱۰,...$ است؛ یعنی: $۲n+۲=۲۰۰ \Rightarrow n=۹۹$

۱۶۱. گزینهٔ «۲» اگر عدد ۱۰۲۰۰ را انتخاب کنیم، لازم نیست سراغ مضرب‌های ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۷ و ... که قبلاً با مضرب‌های ۲، ۳، ۵ و ... خط نخورده‌اند، برویم. عدد ۹۷ آخرین عدد اولی است که مضرب‌های مرکبش خط می‌خورند؛ پس: $۱۰۱^۲=۱۰۲۰۱$

$\Rightarrow ۱۰۲۰۱-۱=۱۰۲۰۰$

۱۶۲. گزینهٔ «۳» در غربال ۱ تا ۲۰۰۰۰، عدد ۲۰۰۰۰ ده‌هزارمین عدد و در واقع آخرین مضرب ۲ است که خط می‌خورد. از ده‌هزارمین عدد به بعد نیز عددها جزء مضرب‌های ۳، ۵ و ... هستند؛ بنابراین: $۱۰۰۲۰-۱۰۰۰۰=۲۰$

یعنی بیستمین عددی که از مضرب‌های ۳ خط می‌خورد پاسخ ماست که می‌توان آن را از الگوی $۹,۱۵,۲۱,۲۷,...$ و با توجه به رابطهٔ $۶n+۳$ به‌راحتی پیدا کرد: $۶(۲۰)+۳=۱۲۰+۳=۱۲۳$

۱۶۳. گزینهٔ «۱»

اولین مضرب ۷ که خط می‌خورد $= ۷\times۷=۴۹$

دومین مضرب ۷ که خط می‌خورد $= ۷\times۱۱=۷۷$

سومین مضرب ۷ که خط می‌خورد $= ۷\times۱۳=۹۱$

چهارمین مضرب ۷ که خط می‌خورد $= ۷\times۱۷=۱۱۹$

پنجمین مضرب ۷ که خط می‌خورد $= ۷\times۱۹=۱۳۳$

ششمین مضرب ۷ که خط می‌خورد $= ۷\times۲۳=\underset{\text{آخرین مضرب ۷ در غربال ۱ تا ۲۰۰}}{\underset{\downarrow}{۱۶۱}}$

۱۶۴. گزینهٔ «۴»

$\underset{۲k}{\underset{\downarrow}{۳۵۰}},\underset{۳k}{\underset{\downarrow}{۲۵۵}},\underset{۷k}{\underset{\downarrow}{۴۹}},\underset{۷k}{\underset{\downarrow}{۱۶۱}},\underset{۱۱k}{\underset{\downarrow}{۱۸۷}},\underset{۱۱k}{\underset{\downarrow}{۲۵۳}},\underset{۱۳k}{\underset{\downarrow}{۲۲۱}}$

۳۵۰ اولین عدد است که خط می‌خورد؛ زیرا زوج است، ۲۵۵ دومین عدد است که خط می‌خورد؛ زیرا مضرب ۳ است و...

۱۶۵. گزینهٔ «۲» عدد ۱۸۳ مضرب ۳ است از طرفی می‌دانیم که عدد ۶۰۰۰، سه‌هزارمین عددی است که خط می‌خورد؛ پس حتماً عدد ۱۸۳ سه‌هزاروnاُمین عددی است که خط می‌خورد: $۶n+۳=۱۸۳ \Rightarrow ۶n=۱۸۳-۳ \Rightarrow ۶n=۱۸۰ \Rightarrow n=\frac{۱۸۰}{۶} \Rightarrow n=۳۰$

$\Rightarrow ۳۰۰۰+۳۰=۳۰۳۰$

۱۶۶. گزینهٔ «۴» ۲۵ عدد اول کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که عبارت‌اند از:

$۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷,۵۳,۵۹,۶۱,۶۷,۷۱,۷۳,۷۹,۸۳,۸۹,۹۷$

پس تعداد عددهایی که خط می‌خورند برابر است با: $۱۰۰-۲۵=۷۵$

۱۶۷. گزینهٔ «۱»

نکته در غربال ۱ تا n عددهای اولی بررسی شوند که از $\sqrt{n}$ کمتر باشند.

با توجه به نکته داریم: $۲^۲=۴,۳^۲=۹,۵^۲=۲۵,۷^۲=۴۹,۱۱^۲=۱۲۱,۱۳^۲=۱۶۹,۱۷^۲=۲۸۹,۱۹^۲=۳۶۱>۳۵۰$

۱۶۸. گزینهٔ «۲»

$\underset{۷k}{\underset{\downarrow}{۹۹۸۹}},\underset{۹۷k}{\underset{\downarrow}{۹۹۹۱}},\underset{۳k}{\underset{\downarrow}{۹۹۹۹}},\underset{۵k}{\underset{\downarrow}{۹۹۹۵}}$

بزرگ‌ترین عدد اولی که مربعش از ۱۰۰۰۰ کوچک‌تر باشد، ۹۷ است. اولین عددی که در مضرب‌های ۹۷ خط می‌خورد $۹۷^۲=۹۴۰۹$ است؛ پس باید دنبال عددی بزرگ‌تر باشیم. در نتیجه $۹۹۹۱=۹۷\times۱۰۳$ عدد موردنظر و پاسخ است.

۱۶۹. گزینهٔ «۱» می‌دانیم ابتدا باید مضرب‌های ۲ را خط بزنیم که تعداد آنها برابر است با: $\frac{۱۰۰۰۰۰-۱۰۰۰۲}{۲}+۱=۴۵۰۰۰$

پس ۴۵۰۰۱اُمین عددی که خط می‌خورد همان اولین مضرب ۳ یعنی ۱۰۰۰۵ است.