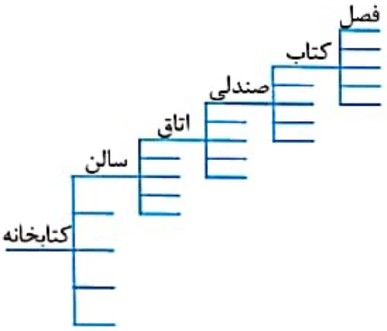
پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. گزینهٔ «۲» برای حل این سؤال می‌توان از اصل ضرب یا راهبرد رسم شکل استفاده کرد:



سالن اتاق صندلی کتاب فصل

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

$$۵\times۵\times۵\times۵\times۵=۵^۵$$

۲. گزینهٔ «۳»

نکته به توان دوم هر عدد، مربع یا مجذور آن عدد و به توان سوم هر عدد، مکعب آن عدد می‌گویند.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{مربع } \frac{۱}{۳}=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۹}\\ \text{مکعب } \frac{۱}{۳}=(\frac{۱}{۳})^۳=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲۷}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۷}=\frac{۳-۱}{۲۷}=\frac{۲}{۲۷}$$

۳. گزینهٔ «۴»

$$۸\times۲^۹=۲^۳\times۲^۹=۲^{۱۲}=(۲^۲)^۶=۴^۶$$

۴. گزینهٔ «۱»

نکته اگر پایهٔ یک عدد توان‌دار معکوس شود، توان آن قرینه می‌شود: $a^{-b}=(\frac{۱}{a})^b$

$$۶-۶[۱+۲۷(-۳)^{-۱}]^{-۲}(-۶)=۶-۶[۱+\frac{۲۷}{-۳}]^{-۲}(-۶)=۶-۶[۱-۹]^{-۲}(-۶)$$

$$=۶-۶(-۸)^{-۲}(-۶)=۶-۶(-\frac{۱}{۸})^۲(-۶)=۶+\frac{۳۶}{۶۴}=۶+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۹۶+۹}{۱۶}=\frac{۱۱۵}{۱۶}$$

۵. گزینهٔ «۳» طبق نکتهٔ سؤال ۴ داریم:

$$\frac{(\frac{۱}{۶})^۲-(\frac{۱}{۲})^۳}{(\frac{۱}{۳})^۳+(\frac{۱}{۴})^۲}=\frac{\frac{۱}{۳۶}-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۱۶}}=\frac{\frac{۲-۹}{۷۲}}{\frac{۱۶+۲۷}{۲۷\times۱۶}}=\frac{\frac{-۷}{۷۲}}{\frac{۴۳}{۲۷\times۱۶}}=\frac{-۷\times۲۷\times۱۶}{۷۲\times۴۳}=\frac{-۴۲}{۴۳}$$

۶. گزینهٔ «۴»

$$\frac{(\frac{۳۱۲۵}{۱۰۰۰۰۰})^{-۱۱}\times(۲^۸)^{-۱۳}}{(۲^۶)^{-۱۷}\times(\frac{۱۵۶۲۵}{۱۰۰۰۰۰۰})^{-۱۹}}=\frac{(\frac{۵^۵}{۱۰^۵})^{-۱۱}\times۲^{-۱۰۴}}{۲^{-۱۰۲}\times(\frac{۵^۶}{۱۰^۶})^{-۱۹}}=\frac{(\frac{۱}{۲})^{-۵۵}\times۲^{-۱۰۴}}{۲^{-۱۰۲}\times(\frac{۱}{۲})^{-۱۱۴}}=\frac{۲^{۵۵}\times۲^{-۱۰۴}}{۲^{-۱۰۲}\times۲^{۱۱۴}}=\frac{۲^{-۴۹}}{۲^{۱۲}}=۲^{-۶۱}$$

۷. گزینهٔ «۱»

$$\frac{a^{۱۱}b^۴}{a^۸b^۶}\div\frac{a^{۳۰}b^{۱۸}}{a^{-۷}b^۷}=\frac{a^۳}{b^۲}\div\frac{a^{۳۰}a^۷b^{۱۱}}{۱}=\frac{a^۳}{b^۲}\times\frac{۱}{a^{۳۷}b^{۱۱}}=\frac{۱}{b^{۱۳}a^{۳۴}}=a^{-۳۴}b^{-۱۳}$$

۸. گزینهٔ «۲»

$$\frac{(۵^۲)^{n+۲}\times۳^{۲n+۱}}{(۵^۲\times۳)^n}=\frac{۵^{۲n+۴}\times۳^{۲n+۱}}{۵^{۲n}\times۳^n}=۵^{۲n+۴-۲n}\times۳^{۲n+۱-n}=۵^۴\times۳^{n+۱}$$

۹.گزینهٔ «۳» ثلث یک عدد یعنی $\frac{۱}{۳}$ آن؛ پس:

$$\frac{۵\times۳^{۱۶}-۳^{۱۵}+۷\times۳^{۱۵}-۴\times۳^{۱۶}}{۳}=\frac{۳^{۱۵}(\overbrace{۵\times۳}^{۱۵}-۱+۷-\overbrace{۴\times۳}^{۱۲})}{۳}=۳^{۱۴}(۹)=۳^{۱۴}\times۳^{۲}=۳^{۱۶}=(۳^{۴})^{۴}=۸۱^{۴}$$

۱۰.گزینهٔ «۴» از $۷^{۵۹}$ در صورت کسر فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\cancel{۷^{۵۹}}(۷^{۲}-۷-۲)}{\cancel{۷^{۵۹}}}=۴۹-۷-۲=۴۰$$

۱۱.گزینهٔ «۴» از $۵^{۱۸}$ در صورت کسر فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۳\times۵^{۱۹}+۵^{۱۹}+۵^{۱۸}+۵^{۱۸}}{۱۱}=\frac{۵^{۱۸}(۳\times۵+۵+۱+۱)}{۱۱}=\frac{۵^{۱۸}\times۲۲}{۱۱}=۵^{۱۸}\times۲$$

۱۲.گزینهٔ «۱» $\overline{mmmm}=۱۰۰۰m+۱۰۰m+۱۰m+m=۱۱۱۱m\Rightarrow(۱۱۱۱m)^{۲}=۱۲۳۴۳۲۱m^{۲}$

۱۳.گزینهٔ «۳» $۲۷^{۴}\times۸۱^{۳n+۱}=(۳^{۳})^{۴}\times(۳^{۴})^{۳n+۱}=۳^{۱۲}\times۳^{۱۲n+۴}=۳^{۱۲n+۱۶}=(۳^{۲})^{۶n+۸}=۹^{۶n+۸}$

۱۴.گزینهٔ «۲» همهٔ گزینه‌ها مضرب ۱۱ هستند؛ اما فقط ۱۱×۲^{۱۷۲۰} بین $۸^{۵۷۴}$ و $۱۶^{۴۳۱}$ است؛ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}۱۶^{۴۳۱}=(۲^{۴})^{۴۳۱}=۲^{۱۷۲۴}=۲^{۱۷۲۰}\times۲^{۴}=۱۶\times۲^{۱۷۲۰}\\ ۸^{۵۷۴}=(۲^{۳})^{۵۷۴}=۲^{۱۷۲۲}=۲^{۱۷۲۰}\times۲^{۲}=۴\times۲^{۱۷۲۰}\end{array}\right\}\Rightarrow۴\times۲^{۱۷۲۰}<۱۱\times۲^{۱۷۲۰}<۱۶\times۲^{۱۷۲۰}$$

۱۵.گزینهٔ «۱»

یادآوری

حاصل هر عدد غیرصفر به توان صفر برابر با یک است.

طبق یادآوری بالا داریم: $۸-۱(۵-۱\times۱+۱)=۸-(۵-\cancel{۱}+\cancel{۱})=۸-۵=۳$

۱۶.گزینهٔ «۳» $(\frac{۱}{۲^{۳}}-\frac{۱}{۳^{۲}})^{-۱}=(\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۹})^{-۱}=(\frac{۹-۸}{۷۲})^{-۱}=(\frac{۱}{۷۲})^{-۱}=۷۲$

۱۷.گزینهٔ «۲» $\frac{۱}{۳}((-۳)^{۲})^{۳}=\frac{۱}{۳}(-۳)^{۶}=\frac{۱}{۳}\times۳^{۶}=\frac{۳^{۶}}{۳}=۳^{۵}$

۱۸.گزینهٔ «۴» $n=۱\Rightarrow۱۰^{۲}-۱۰^{۱}=۹۰\Rightarrow\text{مجموع رقم‌ها}=۹+۰=۹$

$n=۲\Rightarrow۱۰^{۴}-۱۰^{۲}=۹۹۰۰\Rightarrow\text{مجموع رقم‌ها}=۹+۹+۰+۰=۱۸$

$\vdots$

با الگویابی متوجه می‌شویم که تعداد رقم‌های ۹ در حاصل تفریق برابر است با n؛ پس: $\text{مجموع رقم‌ها}=۹n=۹۰۰\Rightarrow n=۱۰۰$

۱۹.گزینهٔ «۴»

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۶۲۵}{۱۰۰}}=۲^{\frac{-۱۰۰}{۶۲۵}}=۲^{-\frac{۴}{۲۵}}$$

۲۰.گزینهٔ «۱»

$$((۳^{۳})^{۲a-۱}\div(۳^{۴})^{a+۱})^{۳}=(۳^{۶a-۳}\div۳^{۴a+۴})^{۳}=(۳^{(۶a-۳)-(۴a+۴)})^{۳}=(۳^{۶a-۳-۴a-۴})^{۳}=(۳^{۲a-۷})^{۳}=۳^{۶a-۲۱}$$

۲۱.گزینهٔ «۴»

نکته

- برای به توان رساندن یک عدد توان‌دار، پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را در هم ضرب می‌کنیم: $(a^{m})^{n}=a^{mn}$
- برای به توان رساندن توان یک عدد توان‌دار، پایه را می‌نویسیم و توان را به تعداد توانش در خودش ضرب می‌کنیم: $a^{m^{n}}=a^{\overbrace{m\times m\times\cdots\times m}^{n\text{تا}}}$

طبق نکتهٔ بالا داریم: $۷^{۱۲}\times(۷^{۲})^{۹}\times۷^{۲^{۹}}\times(۷^{۸})^{۲}\times۷^{۸^{۲}}=۷^{۱۲}\times۷^{۱۸}\times۷^{۵۱۲}\times۷^{۱۶}\times۷^{۶۴}=۷^{۶۲۲}$

۲۲. گزینهٔ «۱» چون پایه‌ها یکسان است، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^{۲۰۱+۲۰۳+۲۰۵+\cdots+۹۱۵}=a^{۱۷۹\times ۱۱۱۶}$$

$$\text{تعداد}=\frac{۹۱۵-۲۰۱}{۲}+۱=\frac{۷۱۴}{۲}+۱=۳۵۷+۱=۳۵۸\Rightarrow ۲۰۱+۲۰۳+\ldots+۹۱۵=\frac{۳۵۸\times(\overset{۱۱۱۶}{\cancel{۲۰۱+۹۱۵}})}{۲}$$

۲۳. گزینهٔ «۳»

$$۷x^{۲x^{۳x}}=۷(x^{x^{۳x}}\times x^{x^{۳x}})=۷(f\times f)=۷f^{۲}$$

۲۴. گزینهٔ «۲» به مخرج کسر، $۲^{۵۰}$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$\frac{۲^{۱۶}+۲^{۱۶}+۲^{۱۶}+۲^{۱۶}}{۲^{۵۰۰}-۲^{۴۹۹}-۲^{۴۹۸}-\cdots-۲^{۵۰}-۲^{۵۰}+۲^{۵۰}}=\frac{۴\times ۲^{۱۶}}{۲^{۵۰۰}-(\underbrace{۲^{۴۹۹}+۲^{۴۹۸}\underbrace{+\cdots+\underbrace{۲^{۵۰}+۲^{۵۰}}_{۲^{۵۱}}}_{۲^{۵۲}}}_{۲^{۵۰۰}})+۲^{۵۰}}$$

$$=\frac{۲^{۲}\times ۲^{۱۶}}{\cancel{۲^{۵۰۰}}-\cancel{۲^{۵۰۰}}+۲^{۵۰}}=\frac{۲^{۱۸}}{۲^{۵۰}}=۲^{-۳۲}$$

۲۵. گزینهٔ «۴»

$$(-۷)*۳=(-۷)^{-۳}\div ۳^{-۷}=\frac{(-۷)^{-۳}}{۳^{-۷}}=\frac{۳^{۷}}{-۷^{۳}}=-\frac{۳^{۷}}{۷^{۳}}$$

۲۶. گزینهٔ «۲»

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}\times(۳^{۴})^{۱۲}\times(۵^{۴})^{۷}\times(۲^{۱۱})^{۱۰}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲^{۲}}\times ۳^{۴۸}\times ۵^{۲۸}\times ۲^{۱۱۰}=\frac{۲^{۱۱۰}}{۲^{۳}}\times\frac{۳^{۴۸}}{۳}\times\frac{۵^{۲۸}}{۵}=۲^{۱۰۸}\times ۳^{۴۷}\times ۵^{۲۷}$$

۲۷. گزینهٔ «۱» عبارت داده‌شده را مساوی با A قرار می‌دهیم؛ بنابراین:

$$A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{۳}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{۱۰}}+\frac{۱}{۲^{۱۱}}\xrightarrow{\times ۲}۲A=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{۱۰}}$$

پس:

$$۲A-A=(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{۱۰}})-(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{۱۰}}+\frac{۱}{۲^{۱۱}})$$

$$\Rightarrow A=۱+\cancel{\frac{۱}{۲}}+\cancel{\frac{۱}{۲^{۲}}}+\cdots+\cancel{\frac{۱}{۲^{۱۰}}}-\cancel{\frac{۱}{۲}}-\cancel{\frac{۱}{۲^{۲}}}-\cdots-\cancel{\frac{۱}{۲^{۱۰}}}-\frac{۱}{۲^{۱۱}}\Rightarrow A=۱-\frac{۱}{۲^{۱۱}}=\frac{۲^{۱۱}-۱}{۲^{۱۱}}$$

۲۸. گزینهٔ «۳» روش اول: عبارت داده‌شده را مساوی با k قرار می‌دهیم؛ بنابراین:

$$k=۳^{۷}+۳^{۸}+۳^{۹}+\cdots+۳^{۱۰۰۰}\xrightarrow{\times ۳}۳k=۳^{۸}+۳^{۹}+۳^{۱۰}+\cdots+۳^{۱۰۰۱}$$

$$۳k-k=۳^{۸}+۳^{۹}+۳^{۱۰}+\cdots+۳^{۱۰۰۰}+۳^{۱۰۰۱}-(۳^{۷}+۳^{۸}+\cdots+۳^{۱۰۰۰})\Rightarrow ۲k=۳^{۱۰۰۱}-۳^{۷}\Rightarrow k=\frac{۳^{۱۰۰۱}-۳^{۷}}{۲}$$

روش دوم:

نکته اگر $m<n$ ، آنگاه:

$$a^{m}+a^{m+۱}+a^{m+۲}+\cdots+a^{n}=\frac{a^{n+۱}-a^{m}}{a-۱}$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$۳^{۷}+۳^{۸}+۳^{۹}+\cdots+۳^{۱۰۰۰}=\frac{۳^{۱۰۰۱}-۳^{۷}}{۳-۱}=\frac{۳^{۱۰۰۱}-۳^{۷}}{۲}$$

۲۹. گزینهٔ «۳» ابتدا با توجه به نکتهٔ سؤال قبل حاصل عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$۱۰^{۹۰}-(۱۰^{۸۹}+۱۰^{۸۸}+\cdots+۱۰)=۱۰^{۹۰}-\frac{۱۰^{۹۰}-۱۰}{۹}=\frac{۹\times ۱۰^{۹۰}-۱۰^{۹۰}+۱۰}{۹}=\frac{۱۰^{۹۰}(۹-۱)+۱۰}{۹}=\frac{۸\times ۱۰^{۹۰}+۱۰}{۹}$$

بنابراین ۹ برابر حاصل عبارت برابر است با:

$$۹\times\frac{۸\times ۱۰^{۹۰}+۱۰}{۹}=۸\times ۱۰^{۹۰}+۱۰=۸\underbrace{۰۰\cdots۰۰}_{۹۰\text{تا}}+۱۰=۸\underbrace{۰۰\cdots۰۰}_{۸۸\text{تا}}۱۰$$

۳۰.گزینهٔ «۱»

$$۲۵^{۲۵}=(۵^{۲})^{۲۵}=۵^{۵۰} \Rightarrow \text{شمارنده‌های طبیعی } ۵^{۵۰}=۵^{۰},۵^{۱},۵^{۲},\dots,۵^{۵۰}$$

بنابراین:

$$\text{حاصل ضرب شمارنده‌های طبیعی } ۵^{۵۰}=۵^{۰}\times۵^{۱}\times۵^{۲}\times\cdots\times۵^{۵۰}=۵^{۰+۱+۲+\cdots+۵۰}=۵^{\frac{۵۰\times۵۱}{۲}}=۵^{۲۵\times۵۱}=۵^{۱۲۷۵}$$

۳۱.گزینهٔ «۱»

$$\underbrace{۱۰^{۵}+۹\times۱۰^{۵}}_{۱۰\times۱۰^{۵}}+۹\times۱۰^{۶}+\cdots+۹\times۱۰^{n}=\underbrace{۱۰^{۶}+۹\times۱۰^{۶}}_{۱۰\times۱۰^{۶}}+\cdots+۹\times۱۰^{n}=\cdots=۱۰^{n}+۹\times۱۰^{n}=۱۰\times۱۰^{n}=۱۰^{n+۱}$$

۳۲.گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l}a=۳^{۶k-۳}\times۳^{۲k+۲}\times۳^{-۲}=۳^{۸k-۳}\\ b=۳^{۹k-۹}\times۳^{۲k+۳}\times۳^{-۳k}=۳^{۸k-۶}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۳^{۸k-۳}}{۳^{۸k-۶}}=۳^{(۸k-۳)-(۸k-۶)}=۳^{۳}=۲۷\Rightarrow a=۲۷b$$

۳۳.گزینهٔ «۳» به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$۸۲^{۴}-۸۱^{۴}=(۸۲^{۲}-۸۱^{۲})(۸۲^{۲}+۸۱^{۲})=(\overset{۱}{\cancel{۸۲-۸۱}})(۸۲+۸۱)(۸۲^{۲}+۸۱^{۲})=۱۶۳(۸۲^{۲}+۸۱^{۲})$$

۳۴.گزینهٔ «۳» به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$(\underbrace{۳۰-۲۹}_{۱})(۳۰+۲۹)+(\underbrace{۲۸-۲۷}_{۱})(۲۸+۲۷)+\cdots+(\underbrace{۲-۱}_{۱})(۲+۱)=۳۰+۲۹+۲۸+۲۷+\cdots+۲+۱=\frac{۳۰(۳۰+۱)}{۲}=۴۶۵$$

۳۵.گزینهٔ «۳» می‌دانیم که ۱ به توان هر عددی برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$۱^{۲۲۲}+۱^{۳۳۳}+۱^{۴۴۴}+\cdots+۱^{۱۲۳۲۱}=\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{\text{تعداد}=(\frac{۱۲۳۲۱-۲۲۲}{۱۱۱})+۱=۱۱۰}=۱۱۰\times۱=۱۱۰$$

۳۶.گزینهٔ «۱» با کمی دقت به توان عدد داخل دایره‌ها می‌توان متوجه شد که تعداد جمله‌های این الگو ۸۸۸تاست.

$$۲^{۸۸۸}+\enclose{circle}{۲^{۱}},\ ۲^{۸۸۸}+\enclose{circle}{۲^{۲}},\ ۲^{۸۸۸}+\enclose{circle}{۲^{۳}},\dots,\ ۲^{۸۸۸}+\enclose{circle}{۲^{۸۸۸}}$$

۳۷.گزینهٔ «۲»

$$۲^{۱۰}\times۳^{۲}=۱۰۲۴\times۹=۹۲۱۶\Rightarrow\frac{۹۲۱۶}{۲}\cong۴۶۰۸$$

۳۸.گزینهٔ «۲»

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	…	n
تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵ ↓ $۲^{۱}+۳$	۷ ↓ $۲^{۲}+۳$	۱۱ ↓ $۲^{۳}+۳$	۱۹ ↓ $۲^{۴}+۳$	…	$۲^{n}+۳$

۳۹.گزینهٔ «۳»

نکته با هر بار تا کردن کاغذ، ضخامت آن ۲ برابر می‌شود؛ یعنی بعد از n بار تا کردن، ضخامت آن ۲n برابر خواهد شد.

$$\text{ضخامت هر لایه}=\frac{۱۰/۲۴}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۰/۲۴}{۱۰۲۴}=\frac{۱۰۲۴}{۱۰۲۴۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲^{۲}\times۵^{۲}}$$

$$\text{ضخامت پس از n بار تا زدن}=\frac{۲^{n}}{۲^{۲}\times۵^{۲}}=\frac{۲^{n-۲}}{۵^{۲}}=\frac{۲^{n-۲}}{۲۵}$$

۴۰.گزینهٔ «۴»

$$\text{مسیر طی‌شده}=۹^{x}\div۳=(۳^{۲})^{x}\div۳=۳^{۲x}\div۳=۳^{۲x-۱}$$

$$\text{نصف مسیر}=۹^{x}\div۲=۳^{۲x}\div۲=\frac{۳^{۲x}}{۲}$$

پس:

$$\text{مسیر باقی‌مانده}=\frac{۳^{۲x}}{۲}-۳^{۲x-۱}=\frac{۳^{۲x}}{۲}-\frac{۳^{۲x}}{۳}=\frac{۳\times۳^{۲x}-۲\times۳^{۲x}}{۳\times۲}=\frac{۳^{۲x}}{۳\times۲}=\frac{۳^{۲x-۱}}{۲}$$

۴۱.گزینهٔ «۱» اگر عدد کوچک‌تر را a در نظر بگیریم، عدد بزرگ‌تر $a\times ۶^۲$ است؛ پس: $۶^۸=۶^۲\times a^۲\Rightarrow a^۲=۶^۶\Rightarrow a=۶^۳$

بنابراین: $۶^۸=۶^۳\times ۶^۵\Rightarrow \text{عدد کوچک‌تر}=۶^۳=۲۱۶=۴(۵۴)$

۴۲.گزینهٔ «۲» $۳^۳\times ۲^{۲۰}\times ۲^{۸۰}\times ۵^{۹۵}-۱^{۲۰۰}=۳^{۳۰}\times ۲^{۱۰۰}\times ۵^{۹۵}-۱^{۲۰۰}=۳^{۳۰}\times ۲^۵\times ۲^{۹۵}\times ۵^{۹۵}-۱$

$$=۳^۳\times ۲^۵\times ۱۰^{۹۵}-۱=۲۷\times ۳۲\times ۱۰^{۹۵}-۱=۸۶۴\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۹۵تا}}-۱=۸۶۳\underbrace{۹۹\cdots۹}_{\text{۹۵تا}}$$

۴۳.گزینهٔ «۴»

> **نکته** عددهایی که یکان آنها صفر، ۱، ۵ و ۶ است به هر توانی برسند، یکانشان تغییری نخواهد کرد.

طبق نکتهٔ بالا داریم: $۱۲۵^{۷۱}+۱۳۶^{۸۱}=\overline{\cdots۵}+\overline{\cdots۶}=\overline{\cdots۱}$

۴۴.گزینهٔ «۲»

> **نکته** اگر عددهایی را که یکان آنها ۲، ۳، ۷ و ۸ است، به هر توانی برسانیم، برای به‌دست آوردن یکان حاصل، توان آنها را بر ۴ تقسیم می‌کنیم؛ اگر باقی‌مانده ۱ شد، یکان آن عدد را به توان ۱ می‌رسانیم و حاصل، پاسخ موردنظر است. اگر باقی‌مانده ۲ شد، یکان آن عدد را به توان ۲ می‌رسانیم و حاصل، پاسخ موردنظر است. اگر باقی‌مانده ۳ شد، یکان آن عدد را به توان ۳ می‌رسانیم و حاصل، پاسخ موردنظر است و بالاخره اگر باقی‌مانده صفر شد، یکان آن عدد را به توان ۴ می‌رسانیم و حاصل، پاسخ موردنظر است.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۵ & \underline{۴} \\ -۱۲ & ۳ \\ \hline ۳ & \end{array}\Rightarrow ۷^۳=۳۴۳ \qquad\qquad \begin{array}{r|l} ۱۲۱ & \underline{۴} \\ -۱۲۰ & ۳۰ \\ \hline ۱ & \end{array}\Rightarrow ۳^۱=۳$$

پس: $۱۲۳^{۱۲۱}-۱۷^{۱۵}=\overline{\cdots۳}-\overline{\cdots۳}=\overline{\cdots۰}$

۴۵.گزینهٔ «۱»

> **نکته**
> - اگر عددهایی که یکان ۴ دارند به توان فرد برسند، یکان حاصل ۴ و اگر به توان زوج برسند، یکان حاصل ۶ می‌شود.
> - اگر عددهایی که یکان ۹ دارند به توان فرد برسند، یکان حاصل عدد ۹ و اگر به توان زوج برسند، یکان حاصل عدد ۱ می‌شود.

طبق نکتهٔ سؤال ۴۳ و نکتهٔ بالا داریم: $\overline{\cdots۴}-\overline{\cdots۹}+\overline{\cdots۵}=\overline{\cdots۰}$

۴۶.گزینهٔ «۲» طبق نکتهٔ سؤال ۴۴ داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۵ & \underline{۴} \\ -۱۲ & ۳ \\ \hline ۳ & \end{array}\Rightarrow ۸^۳=۵۱۲$$

پس: $\text{تعداد}=(\frac{۹۸-۱۸}{۱۰})+۱=\frac{۸۰}{۱۰}+۱=۸+۱=۹\Rightarrow \underbrace{\overline{\cdots۲}+\overline{\cdots۲}+\overline{\cdots۲}+\cdots+\overline{\cdots۲}}_{\text{۹تا}}=\overline{\cdots۸}$

۴۷.گزینهٔ «۱»

> **نکته** یکان $n!$ به ازای $n\geq ۵$ به دلیل وجود عامل‌های ۲ و ۵ صفر است.

همان‌طور که می‌بینید عدد !۷۵۳۷۸۷ عامل‌های ۲ و ۵ دارد که در این صورت حتماً یکان این عدد صفر می‌شود؛ پس طبق نکتهٔ سؤال ۴۳ یکان حاصل، صفر است.

$$۷۵۳۷۸۷! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times \cdots \times ۷۵۳۷۸۷ = \overline{\cdots ۰}$$

$$\overline{\cdots ۰}^{\,۴۳۷۵!} = \overline{\cdots ۰}$$

۴۸. گزینهٔ «۳» طبق نکتهٔ سؤال ۴۴ داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۵۳ & ۴ \\ \cline{2-2} -۴ & ۱۳ \\ \cline{1-1} ۱۳ & \\ -۱۲ & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array} \Rightarrow ۲^۱ = ۲$$

$$\begin{array}{r|l} ۹۱ & ۴ \\ \cline{2-2} -۸ & ۲۲ \\ \cline{1-1} ۱۱ & \\ -۸ & \\ \cline{1-1} ۳ & \end{array} \Rightarrow ۳^۳ = ۲۷$$

بنابراین:

$$۱۲۳^{۹۱} \times ۵۳۲^{۵۳} = \overline{\cdots ۷} \times \overline{\cdots ۲} = \overline{\cdots ۴}$$

۴۹. گزینهٔ «۴»

$$۲۵^۳ = (۵^۲)^۳ = (۵^۳)^۲ = ۱۲۵^۲ \xrightarrow{\text{اولین مجذور کامل بعد از } ۲۵^۳} (۱۲۵+۱)^۲ = ۱۲۶^۲ = \overline{\cdots ۶}$$

۵۰. گزینهٔ «۳»

$$۳۲^۶ = (۲^۵)^۶ = ۲^{۳۰} = (۲^{۱۰})^۳ = ۱۰۲۴^۳ \xrightarrow{\text{مکعب کامل قبل از } ۲^{۳۰}} (۱۰۲۴-۱)^۳ = ۱۰۲۳^۳ \Rightarrow ۳^۳ = ۲۷$$

پس یکان برابر با ۷ است.

۵۱. گزینهٔ «۲»

یادآوری

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۰ با یکان آن عدد برابر است.

طبق نکتهٔ سؤال‌های ۴۳ و ۴۴ داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۸۹ & ۴ \\ \cline{2-2} -۸ & ۲۲ \\ \cline{1-1} ۹ & \\ -۸ & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array} \Rightarrow ۳^۱ = ۳$$

$$\Rightarrow \overline{\cdots ۶} + \overline{\cdots ۳} + \overline{\cdots ۵} = \overline{\cdots ۴}$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{array}{r|l} \overline{\cdots ۴} & ۱۰ \\ \cline{2-2} -\cdots & \\ \cline{1-1} ۴ & \end{array}$$

۵۲. گزینهٔ «۱»

طبق نکتهٔ سؤال‌های ۴۳، ۴۴ و ۴۵ داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۸ & ۴ \\ \cline{2-2} -۱۶ & ۴ \\ \cline{1-1} ۲ & \end{array} \Rightarrow ۸^۲ = ۶۴$$

$$\begin{array}{r|l} ۹ & ۴ \\ \cline{2-2} -۸ & ۲ \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array} \Rightarrow ۷^۱ = ۷$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۳ & ۴ \\ \cline{2-2} -۱۲ & ۳ \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array} \Rightarrow ۳^۱ = ۳$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۲ & ۴ \\ \cline{2-2} -۱۲ & ۳ \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array} \Rightarrow ۲^۴ = ۱۶$$

بنابراین:

$$\overline{\cdots ۱} + \overline{\cdots ۶} + \overline{\cdots ۳} - \overline{\cdots ۴} + \overline{\cdots ۵} + \overline{\cdots ۶} - \overline{\cdots ۷} + \overline{\cdots ۴} + \overline{\cdots ۹} = \overline{\cdots ۳}$$

۵۳. گزینهٔ «۳»

$$۳^۵ = ۲۴۳ \Rightarrow \begin{array}{r|l} ۲۴۳ & ۴ \\ \cline{2-2} -۲۴ & ۶۰ \\ \cline{1-1} ۳ & \end{array} \Rightarrow ۳^۳ = ۲۷$$

۵۴. گزینهٔ «۱»

نکته

- اگر یکان عددی ۲ باشد و به‌صورت متوالی به توان عددهای طبیعی برسد، یکان حاصل به‌ترتیب ۲، ۴، ۸ و ۶ است.
- اگر یکان عددی ۳ باشد و به‌صورت متوالی به توان عددهای طبیعی برسد، یکان حاصل به‌ترتیب ۳، ۹، ۷ و ۱ است.

طبق نکتهٔ بالا در بین عددها، مجموع ۶ و ۱ برابر با ۷ است؛ پس طبق نکتهٔ سؤال ۴۳ باید به‌دنبال توانی باشیم که بر ۴ بخش‌پذیر است.

از میان گزینه‌ها فقط گزینهٔ ۱ بر ۴ بخش‌پذیر است.

۵۵.گزینهٔ «۱» با راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر داریم:

$۷^۸$	$۷^۷$	$۷^۶$	$۷^۵$	$۷^۴$	$۷^۳$	$۷^۲$	$۷^۱$	**عدد توان‌دار**
$\overline{۰۰۰۱}$	$\overline{۰۰۴۳}$	$\overline{۰۰۴۹}$	۱۶۸۰۷	۲۴۰۱	۳۴۳	۴۹	۰۷	**حاصل**

بنابراین دو رقم سمت راست، ۴ بار ۴ بار تکرار می‌شوند؛ پس: $۵۳۷۱ \begin{array}{|l} ۴ \\ \hline ۱۳۴۲ \end{array}$

$\overline{\quad\quad} \\ ۳ \Rightarrow ۷^۳ = ۳۴۳$

بنابراین دو رقم سمت راست مانند $۷^۳$ برابر با ۴۳ است.

۵۶.گزینهٔ «۳»

> **نکته** برای آنکه تعداد صفرهای سمت راست یک عدد را به‌دست آوریم، باید آن را تجزیه کنیم و توان عامل‌های ۲ و ۵ را در صورت وجود پیدا کنیم؛ چون حاصل ضرب عامل‌های ۲ و ۵ یک صفر در سمت راست عدد تولید می‌کند. تعداد این دو عامل اهمیت دارد و باید از بین آنها کمترین تعداد را انتخاب کنیم.

طبق نکتهٔ بالا داریم: $۷^۸ \times ۵^۲ \times ۵^{۸۸} \times ۲^{۸۸} = ۷^۸ \times ۵^۲ \times ۱۰^{۸۸}$

۵۷.گزینهٔ «۲» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$۴۹^{۱۷} \times ۸۱^{۱۴} \times (۵^۳)^۹ \times (۲^۴)^۹ = ۴۹^{۱۷} \times ۸۱^{۱۴} \times ۵^{۲۷} \times ۲^{۳۶} = ۴۹^{۱۷} \times ۸۱^{۱۴} \times ۲^۹ \times ۲^{۲۷} \times ۵^{۲۷} = ۴۹^{۱۷} \times ۸۱^{۱۴} \times ۲^۹ \times ۱۰^{۲۷}$$

۵۸.گزینهٔ «۴»

> **نکته** برای محاسبهٔ تعداد صفرهای سمت راست n! باید تعداد عامل‌های ۵ در n را پیدا کنیم (زیرا تعداد عامل‌های ۵ از تعداد عامل‌های ۲ کمتر است)؛ پس n را بر $۵^۱$، $۵^۲$، $۵^۳$ و ... (تا جایی که این عددها از n کوچک‌تر باشند) تقسیم می‌کنیم و مجموع خارج قسمت‌ها را به‌دست می‌آوریم یا n را به‌صورت متوالی بر ۵ تقسیم می‌کنیم و مجموع خارج قسمت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

طبق نکتهٔ بالا داریم: $۷۱ \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۱۴} \end{array} \qquad ۷۱ \begin{array}{|l} ۲۵ \\ \hline \textcircled{۲} \end{array} \Rightarrow ۱۴ + ۲ = ۱۶$ یا $\begin{array}{r|l} ۷۱ & ۵ \\ \cline{2-2} & \textcircled{۱۴} \\ \underline{-۱۰} & \\ ۴ & \end{array} \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۲} \end{array} \Rightarrow ۱۴ + ۲ = ۱۶$

۵۹.گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم:

سمت راست عدد !۵۱، ۱۲تا صفر وجود دارد. $۱۲ = ۲ + ۱۰ \Leftarrow$ $۵۱ \begin{array}{|l} ۲۵ \\ \hline \textcircled{۲} \end{array} \qquad ۵۱ \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۱۰} \end{array}$

سمت راست عدد !۵۳ هم ۱۲تا صفر وجود دارد. $۱۲ = ۲ + ۱۰ \Leftarrow$ $۵۳ \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۲} \end{array} \qquad ۵۳ \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۱۰} \end{array}$

بنابراین این دو عدد به هر توانی برسند و در هم ضرب شوند، حتماً چهار رقم سمت راست حاصل ضرب آنها صفر است.

۶۰.گزینهٔ «۱» $۱۲۱۱ \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۲۴۲} \end{array} \quad ۱۲۱۱ \begin{array}{|l} ۲۵ \\ \hline \textcircled{۴۸} \end{array} \quad ۱۲۱۱ \begin{array}{|l} ۱۲۵ \\ \hline \textcircled{۹} \end{array} \quad ۱۲۱۱ \begin{array}{|l} ۶۲۵ \\ \hline \textcircled{۱} \end{array} \Rightarrow ۲۴۲ + ۴۸ + ۹ + ۱ = ۳۰۰$

در سمت راست عدد !۱۲۱۱، ۳۰۰تا صفر قرار دارد؛ بنابراین ۲۵۰اُمین رقم سمت راست آن صفر است.

۶۱.گزینهٔ «۴» با توجه به نکتهٔ سؤال ۵۸ داریم: $۲۵ \begin{array}{|l} ۵ \\ \hline \textcircled{۵} \end{array} \qquad ۲۵ \begin{array}{|l} ۲۵ \\ \hline \textcircled{۱} \end{array} \Rightarrow ۵ + ۱ = ۶$

!۲۵، ۶ عامل ۵ و در نتیجه ۶ صفر در سمت راست خود دارد؛ پس حتماً ۳ رقم سمت راست آن، صفر است؛ پس:

$$۲۵! = \overline{\cdots ۰۰۰} \Rightarrow ۲۵! + ۲۴۳ = \overline{\cdots ۰۰۰} + ۲۴۳ = \overline{\cdots ۲۴۳}$$

۶۲.گزینهٔ «۱»

نکته برای به‌دست آوردن تعداد رقم‌های یک عدد بعد از به توان رساندن، ابتدا عددهایی را که عامل‌های ۲ و ۵ دارند، تجزیه می‌کنیم؛ سپس توان عامل‌های ۲ و ۵ را طوری تجزیه می‌کنیم تا عددهای ۲ و ۵ با توان مساوی به‌وجود آید که از حاصل ضرب آنها، عددی توان‌دار با پایهٔ ۱۰ تولید می‌شود و در نهایت حاصل ضرب سایر عامل‌ها را به‌دست می‌آوریم و به تعداد توان عدد ۱۰، جلوی آن عدد صفر قرار می‌دهیم تا تعداد رقم‌های آن عدد پیدا شود.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۵^{۱۲}\times ۲^{۱۷}=۲^{۵}\times ۲^{۱۲}\times ۵^{۱۲}=۳۲\times ۱۰^{۱۲}=\underbrace{۳۲\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۱۲تا}}}_{\text{۱۴تا}}$$

۶۳.گزینهٔ «۳» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$(۲^{۳})^{۱۳۹۰}\times(۵^{۲})^{۲۰۸۵}=۲^{۴۱۷۰}\times ۵^{۴۱۷۰}=۱۰^{۴۱۷۰}=\underbrace{۱\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۴۱۷۰تا}}}_{\text{۴۱۷۱تا}}$$

۶۴.گزینهٔ «۱»

$$(۲^{۵})^{۱۲}\times(۵^{۳}\times ۱۰^{-۳})\times(۵^{۵})^{۱۱}=۲^{۶۰}\times ۵^{۳}\times ۱۰^{-۳}\times ۵^{۵۵}$$

$$=۵^{۵۸}\times ۲^{۶۰}\times ۱۰^{-۳}=۲^{۲}\times ۲^{۵۸}\times ۵^{۵۸}\times ۱۰^{-۳}=۴\times ۱۰^{۵۸}\times ۱۰^{-۳}=۴\times ۱۰^{۵۵}=\underbrace{۴\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۵۵تا}}}_{\text{۵۶تا}}$$

۶۵.گزینهٔ «۲»

$$(۵\times ۱۰^{۳})^{۲}\times(۳\times ۱۰^{-۲})^{۳}=۲۵\times ۱۰^{۶}\times ۲۷\times ۱۰^{-۶}=۶۷۵\times ۱۰^{۰}=۶۷۵\times ۱=۶۷۵$$

۶۶.گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ سؤال ۶۲ داریم:

$$(۵^{۴})^{۱۵۰}\times(۲^{۱۰})^{۶۱}=۵^{۶۰۰}\times ۲^{۶۱۰}=۲^{۱۰}\times ۲^{۶۰۰}\times ۵^{۶۰۰}=۱۰۲۴\times ۱۰^{۶۰۰}=\underbrace{۱۰۲۴\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۶۰۰تا}}}_{\text{۶۰۴تا}}$$

۶۷.گزینهٔ «۳»

$$۷^{۲}\times(۲^{۲})^{۱۹}\times(۵^{۳})^{۱۲}=۴۹\times ۲^{۳۸}\times ۵^{۳۶}=۴۹\times ۲^{۲}\times ۲^{۳۶}\times ۵^{۳۶}=۴۹\times ۴\times ۱۰^{۳۶}=۱۹۶\times ۱۰^{۳۶}=\underbrace{۱۹۶\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۳۶تا}}}_{\text{۳۹تا}}$$

۶۸.گزینهٔ «۳» چون عدد موردنظر عامل‌های ۲ و ۵ را ندارد، به کمک راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر تعداد رقم‌های آن را پیدا می‌کنیم. به جدول زیر توجه کنید؛ ردیف پایین ۲تا ۲تا تغییر می‌کند:

عدد توان‌دار	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$	$۳^{۵}$	$۳^{۶}$	$۳^{۷}$	$۳^{۸}$	…	$۳^{۶۱}$	$۳^{۶۲}$
تعداد رقم‌ها	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	…	۳۱	۳۱

۶۹.گزینهٔ «۲» به جدول زیر توجه کنید؛ ردیف پایین ۳تا ۳تا تغییر می‌کند:

عدد توان‌دار	$۲^{۱}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$	$۲^{۴}$	$۲^{۵}$	$۲^{۶}$	$۲^{۷}$	$۲^{۸}$	$۲^{۹}$	…	$۲^{۵۰}$	$۲^{۵۱}$
تعداد رقم‌ها	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۳	…	۱۷	۱۷

۷۰.گزینهٔ «۲»

نکته اگر $m<n$، مجموع رقم‌های $۱۰^{n}-۱۰^{m}$ برابر است با: $۹\times(n-m)$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۹\times(\overset{۷}{\cancel{۳۲-۲۵}})=۶۳$$

۷۱. گزینهٔ «۳»

نکته مجموع رقم‌های $\underbrace{۱۰^{a}+۱۰^{b}+\cdots+۱۰^{k}}_{\text{تا}n}$ برابر با n است.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۱۰۰۰^{۵۰۱}+۱۰۰^{۴۰۱}=(۱۰^{۳})^{۵۰۱}+(۱۰^{۲})^{۴۰۱}=\underbrace{۱۰^{۱۵۰۳}+۱۰^{۸۰۲}}_{\text{۲تا}}\Rightarrow \text{مجموع رقم‌ها}=۲$$

۷۲. گزینهٔ «۴»

نکته مجموع رقم‌های $(\underbrace{۹۹\cdots۹}_{\text{تا}n})^{۲}$ برابر با ۹n است.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۹۹\times۹=۸۹۱$$

۷۳. گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ سؤال ۶۲ داریم:

$$۵^{۷۰۱}\times۳۲^{۱۴۰}=۵^{۷۰۱}\times(۲^{۵})^{۱۴۰}=۵^{۷۰۱}\times۲^{۷۰۰}=۵\times۵^{۷۰۰}\times۲^{۷۰۰}=۵\times۱۰^{۷۰۰}=۵\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۷۰۰تا}}\Rightarrow \text{مجموع رقم‌ها}=۵$$

۷۴. گزینهٔ «۳»

$$۱۰۰^{۶۰۲۰}-۶۰۲۰=(۱۰^{۲})^{۶۰۲۰}-۶۰۲۰=۱۰^{۱۲۰۴۰}-۶۰۲۰=۱\underbrace{۰۰\cdots۰۰۰۰}_{\text{۱۲۰۴۰تا}}-۶۰۲۰=\underbrace{۹\cdots۹۹}_{\text{۱۲۰۳۶تا}}۳۹۸۰$$

بنابراین:

$$\text{مجموع رقم‌ها}=۹\times۱۲۰۳۶+۳+۹+۸=۹\times۱۲۰۳۷+۳+۸=۱۰۸۳۴۴$$

۷۵. گزینهٔ «۱»

نکته مجموع رقم‌های $(۱۰^{k}+m)^{n}$ به ازای n، m و k طبیعی، برابر است با: $(۱+\text{مجموع رقم‌های عدد } m)^{n}$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$(۱+۲)^{۲}=۳^{۲}$$

۷۶. گزینهٔ «۲» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$(۷+۲+۱)^{۳}=۱۰^{۳}$$

۷۷. گزینهٔ «۳»

نکته در مقایسهٔ عددهای توان‌دار با پایهٔ مثبت و بزرگ‌تر از ۱:

- اگر پایه‌ها مساوی باشند، عددی بزرگ‌تر است که توان بزرگ‌تری داشته باشد.
- اگر پایه‌ها مساوی نباشند ولی توان‌ها مساوی باشند، عددی بزرگ‌تر است که پایهٔ بزرگ‌تری داشته باشد.
- اگر توان و پایه‌ها مساوی نباشند، با تجزیه، پایهٔ آنها را مساوی می‌کنیم و اگر پایه‌ها تجزیه نشوند از ب.م.م توان‌ها استفاده می‌کنیم.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{گزینهٔ ۱: }۲^{۳۳}=۲^{۳۰}\times۲^{۳}=(۲^{۳})^{۱۰}\times۸=۸^{۱۰}\times۸\\ \text{گزینهٔ ۲: }۳^{۲۳}=۳^{۲۰}\times۳^{۳}=(۳^{۲})^{۱۰}\times۲۷=۹^{۱۰}\times۲۷\\ \text{گزینهٔ ۳: }۹^{۹}\times۲۷=۳^{۲۱}=(۳^{۲})^{۱۰}\times۳=۹^{۱۰}\times۳\\ \text{گزینهٔ ۴: }۸^{۹}\times۸=۸^{۱۰}=۲^{۳۰}\end{array}\right\}\Rightarrow ۹^{۱۰}\times۲۷>۹^{۱۰}\times۳>۸^{۱۰}\times۸>۲^{۳۰}\Rightarrow ۳^{۲۳}>۹^{۹}\times۲۷>۲^{۳۳}>۸^{۹}\times۸$$

۷۸.گزینهٔ «۲»

نکته

- اگر عددی مثبت بین صفر و یک باشد، هر چه به توان بزرگ‌تری برسد، حاصل کوچک‌تر می‌شود.
- اگر صورت کسرها مساوی باشند، کسری بزرگ‌تر است که مخرج آن کوچک‌تر باشد.

بررسی گزینه‌ها

گزینهٔ ۱: $۳۲^{-۵۰} > ۸۱^{-۶۳} \Rightarrow ۲^{-۲۵۰} > ۳^{-۲۵۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲^{۲۵۰}} > \frac{۱}{۳^{۲۵۲}}$ ✓

گزینهٔ ۲: $۸^{-۱۰۰} < ۲۷^{-۱۳۴} \Rightarrow ۲^{-۳۰۰} < ۳^{-۴۰۲} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۳۰۰} < (\frac{۱}{۳})^{۴۰۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲^{۳۰۰}} < \frac{۱}{۳^{۴۰۲}}$ ×

گزینهٔ ۳: $۴^{-۱۲۰} > ۹^{-۱۵۱} \Rightarrow ۲^{-۲۴۰} > ۳^{-۳۰۲} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۲۴۰} > (\frac{۱}{۳})^{۳۰۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲^{۲۴۰}} > \frac{۱}{۳^{۳۰۲}}$ ✓

گزینهٔ ۴: $۱۶^{-۳۰} > ۸۱^{-۵۰} \Rightarrow ۲^{-۱۲۰} > ۳^{-۲۰۰} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۱۲۰} > (\frac{۱}{۳})^{۲۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲^{۱۲۰}} > \frac{۱}{۳^{۲۰۰}}$ ✓

۷۹.گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ سؤال ۷۷، توان‌ها را مساوی کرده و پایه‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{گزینهٔ ۱: } ۲^{۸۰۰} = (۲^{۸})^{۱۰۰} = ۲۵۶^{۱۰۰} \\ \text{گزینهٔ ۲: } ۳^{۵۰۰} = (۳^{۵})^{۱۰۰} = ۲۴۳^{۱۰۰} \\ \text{گزینهٔ ۳: } ۵^{۳۰۰} = (۵^{۳})^{۱۰۰} = ۱۲۵^{۱۰۰} \\ \text{گزینهٔ ۴: } ۷^{۲۰۰} = (۷^{۲})^{۱۰۰} = ۴۹^{۱۰۰}\end{array}\right\} \Rightarrow ۲۵۶^{۱۰۰} > ۲۴۳^{۱۰۰} > ۱۲۵^{۱۰۰} > ۴۹^{۱۰۰} \Rightarrow ۲^{۸۰۰} > ۳^{۵۰۰} > ۵^{۳۰۰} > ۷^{۲۰۰}$$

۸۰.گزینهٔ «۳» با مساوی کردن پایه‌ها توان‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}a = (۴^{۲})^{۲} = ۴^{۴} = (۲^{۲})^{۴} = ۲^{۸} \\ b = (۲^{۲})^{۴^{۲}} = (۲^{۲})^{۱۶} = ۲^{۳۲} \\ c = ۴^{۲^{۲}} = ۴^{۴} = (۲^{۲})^{۴} = ۲^{۸} \\ d = ۲^{۲^{۴}} = ۲^{۱۶}\end{array}\right\} \Rightarrow a = c < d < b$$

۸۱.گزینهٔ «۱» $m^{۵۱} \geq ۳۱۲۵^{۱۷} \Rightarrow (m^{۳})^{۱۷} \geq ۳۱۲۵^{۱۷} \Rightarrow m^{۳} \geq ۳۱۲۵$

با راهبرد حدس و آزمایش نتیجه می‌گیریم که $m = ۱۵$ $(۱۵^{۳} = ۳۳۷۵)$؛ کمترین مقدار طبیعی است که در این مسئله صدق می‌کند.

۸۲.گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{array}{l}۳ \times ۷^{۱۰۰۰} = ۳ \times ۷^{۲} \times ۷^{۹۹۸} = ۳ \times ۴۹ \times ۷^{۹۹۸} = ۱۴۷ \times ۷^{۹۹۸} \\ ۱۵ \times ۷^{۹۹۸} \\ ۸ \times ۷^{۹۹۹} = ۸ \times ۷ \times ۷^{۹۹۸} = ۵۶ \times ۷^{۹۹۸}\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۴۷ \times ۷^{۹۹۸} > ۵۶ \times ۷^{۹۹۸} > ۱۵ \times ۷^{۹۹۸}$$

۸۳.گزینهٔ «۴» پایه‌ها یکسان است؛ بنابراین کافی است توان‌ها را با هم مقایسه کنیم. واضح است که: $۳^{۳۳} > ۳^{۲۷}$, $۳۳۳ > ۳۳$

کافی است مشخص کنیم که $۳^{۲۷}$ از ۳۳۳ بزرگ‌تر است یا کوچک‌تر؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l}۳۳۳ = ۳ \times (۱۱۱) \\ ۳^{۲۷} = ۳ \times ۳^{۲۶}\end{array}\right\} \Rightarrow ۳^{۲۷} > ۳^{۳۳۳}$$

بنابراین: $۳^{۳۳} > ۳^{۲۷} > ۳۳۳ > ۳۳ \Rightarrow ۳^{۳۳} < ۳^{۳۳۳} < ۳^{۳^{۲۷}} < ۳^{۳^{۳۳}}$

۸۴. گزینهٔ «۲»

نکته به عددی که پس از تجزیه به عامل‌های اول، توان عامل‌های آن زوج باشد، مجذور کامل می‌گوییم.

$$۱۲۵^{۱۵}\times ۱۶^{۱۳}=(۵^{۳})^{۱۵}\times (۲^{۴})^{۱۳}=۵^{۴۵}\times ۲^{۵۲}$$

با توجه به نکتهٔ بالا توان ۵ زوج نیست پس باید $۵^{۴۵}\times ۲^{۵۲}$ را بر ۵ تقسیم کنیم؛ بنابراین عدد $۵^{۴۶}\times ۲^{۵۲}$ مجذور کامل است.

۸۵. گزینهٔ «۲»

نکته به عددی که پس از تجزیه به عامل‌های اول، توان عامل‌های آن مضرب ۳ باشد، مکعب کامل می‌گوییم.

$$M=۳^{۶}\times (۲^{۴})^{۵}=۳^{۶}\times ۲^{۲۰}$$

با توجه به نکتهٔ بالا توان عدد ۲، مضرب ۳ نیست؛ پس باید $۳^{۶}\times ۲^{۲۰}$ را در ۲ ضرب کنیم تا مکعب کامل شود.

۸۶. گزینهٔ «۳»

$$۴۹^{۱۰}\times ۳۶^{۱۳}\times ۲۴^{۱۷}=(۷^{۲})^{۱۰}\times (۲^{۲}\times ۳^{۲})^{۱۳}\times (۲^{۳}\times ۳)^{۱۷}=۷^{۲۰}\times ۲^{۲۶}\times ۳^{۲۶}\times ۲^{۵۱}\times ۳^{۱۷}=۷^{۲۰}\times ۲^{۷۷}\times ۳^{۴۳}$$

باید این عبارت را در ۷، ۲ و $۳^{۲}$ ضرب کنیم تا توان عامل‌ها مضرب ۳ شود، بنابراین:

$$۷^{۲۱}\times ۲^{۷۸}\times ۳^{۴۵}\Rightarrow ۷\times ۲\times ۹=۱۲۶$$

۸۷. گزینهٔ «۳»

باید این عبارت را بر $۷^{۱}$ و $۳^{۲}$ تقسیم کنیم تا توان عامل‌ها مضرب ۳ شود و حاصل مکعب کامل شود؛ بنابراین: $۵۰۴۰۰۰=۲^{۶}\times ۳^{۲}\times ۵^{۳}\times ۷$

$$\frac{۲^{۶}\times ۳^{۲}\times ۵^{۳}\times ۷}{۹\times ۷}=۲^{۶}\times ۵^{۳}\Rightarrow ۹\times ۷=۶۳$$

۸۸. گزینهٔ «۴»

$$۱۶^{۳}=(۲^{۴})^{۳}=۱۲^{۱۲}=(۲^{۶})^{۲}=۶۴^{۲}\qquad ۹^{۴}=(۳^{۲})^{۴}=(۳^{۴})^{۲}=۸۱^{۲}$$

بنابراین:

$$۶۵^{۲}\,,۶۶^{۲}\,,۶۷^{۲}\,,\ldots,۸۰^{۲}\Rightarrow \text{تعداد}=(\frac{۸۰-۶۵}{۱})+۱=۱۶$$

۸۹. گزینهٔ «۲» کوچک‌ترین عدد چهاررقمی ۱۰۰۰ و بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی ۹۹۹۹ است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۱۰۰۰}\simeq ۳۱/۶\\ \sqrt{۹۹۹۹}\simeq ۹۹/۹\end{array}\right\}\Rightarrow \text{عددهای موردنظر}=۳۲^{۲}\,,۳۳^{۲}\,,\ldots,۹۹^{۲}\Rightarrow \text{تعداد}=(\frac{۹۹-۳۲}{۱})+۱=۶۸$$

۹۰. گزینهٔ «۴» عددهای سه‌رقمی مکعب کامل عبارت‌اند از:

$$\underbrace{۵^{۳},۶^{۳},۷^{۳},۸^{۳},۹^{۳}}_{\text{۵تا}}$$

۹۱. گزینهٔ «۲» از a^{x} در صورت و مخرج کسر فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{a^{x}(۱+۴+a-۵a+a^{۲})}{a^{x+۲}+a^{x+۱}}=\frac{a^{x}(۵-۴a+a^{۲})}{a^{x}(a^{۲}+a^{۱})}=\frac{(۵-۴(۳)+۳^{۲})}{۳^{۲}+۳^{۱}}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

۹۲. گزینهٔ «۳»

$$\frac{۵^{۲۱۰}+۵\times ۵^{۲}\times ۵^{۳}\times \cdots\times ۵^{۲۰}}{۵^{-۷۰}+۵^{-۷۰}}=\frac{۵^{۲۱۰}+۵^{۱+۲+\cdots+۲۰}}{۲\times ۵^{-۷۰}}=\frac{۵^{۲۱۰}+۵^{\frac{۲۰\times ۲۱}{۲}}}{۲\times ۵^{-۷۰}}$$

$$=\frac{۵^{۲۱۰}+۵^{۲۱۰}}{۲\times ۵^{-۷۰}}=\frac{\cancel{۲}\times ۵^{۲۱۰}}{\cancel{۲}\times ۵^{-۷۰}}=۵^{۲۱۰}\times ۵^{۷۰}=۵^{۲۸۰}=(۵^{۲})^{۱۴۰}=۲۵^{۱۴۰}$$

۱۰۱. گزینهٔ «۱»

$$۷^{ab}+۵^{ba}=(۷^{a})^{b}+(۵^{b})^{a}=۵^{b}+۷^{a}=۷+۵=۱۲$$

۱۰۲. گزینهٔ «۱»

$$(\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰})^{۱-x}=(\frac{۵^{۴}}{۱۰^{۴}})^{۱-x}=((\frac{۱}{۲})^{۴})^{۱-x}=(۲^{-۴})^{۱-x}=۲^{۴x-۴}=\frac{۲^{۴x}}{۲^{۴}}=\frac{۶^{۴}}{۲^{۴}}=۳^{۴}$$

۱۰۳. گزینهٔ «۳»

$$(((۱۱-۴)^{x}-۴)^{x}+۸۹)^{۱۰۰۰}=((۷^{x}-۴)^{x}+۸۹)^{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow((۱۱-۴)^{x}+۸۹)^{۱۰۰۰}=(۷^{x}+۸۹)^{۱۰۰۰}=(۱۱+۸۹)^{۱۰۰۰}=۱۰۰^{۱۰۰۰}=(۱۰^{۲})^{۱۰۰۰}=۱۰^{۲۰۰۰}$$

۱۰۴. گزینهٔ «۱»

$$\frac{\cancel{۳^{x}}(۳+۳^{۲})}{\cancel{۳^{x}}\times ۵^{x}}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$$

۱۰۵. گزینهٔ «۲»

$$۱۰۰^{m-۲}=n\Rightarrow\frac{۱۰۰^{m}}{۱۰۰^{۲}}=n\Rightarrow ۱۰۰^{m}=۱۰۰۰۰n$$

بنابراین:

$$۱۰۰۰۰^{m+۲}=(۱۰۰^{۲})^{m+۲}=۱۰۰^{۲m+۴}=۱۰۰^{۲m}\times ۱۰۰^{۴}=(۱۰۰^{m})^{۲}\times(۱۰^{۲})^{۴}=(۱۰۰۰۰n)^{۲}\times ۱۰^{۸}$$

$$=(۱۰^{۴}n)^{۲}\times ۱۰^{۸}=۱۰^{۸}\times n^{۲}\times ۱۰^{۸}=۱۰^{۱۶}n^{۲}=۱\underbrace{۰۰\cdots۰}_{۱۶\text{تا}}n^{۲}$$

۱۰۶. گزینهٔ «۳»

$$x^{۵^{k+۱}}=x^{۵^{k}\times ۵}=(x^{۵})^{۵^{k}}=k^{۵^{k}}$$

۱۰۷. گزینهٔ «۱»

$$\frac{B}{A}=\frac{۲۵۶^{k+۱}}{۶۴^{k-۱}}=\frac{۲^{۸k+۸}}{۲^{۶k-۶}}\Rightarrow\frac{B}{A}=۲^{۲k+۱۴}$$

۱۰۸. گزینهٔ «۴»

$$(۲۵^{-۳n}-۱۰۴)^{-۲n}=(۵^{-۶n}-۱۰۴)^{-۲n}=((۵^{-n})^{۶}-۱۰۴)^{-۲n}=(۳^{۶}-۱۰۴)^{-۲n}=(۷۲۹-۱۰۴)^{-۲n}=(۶۲۵)^{-۲n}$$

$$=(۵^{۴})^{-۲n}=۵^{-۸n}=(۵^{-n})^{۸}=۳^{۸}$$

۱۰۹. گزینهٔ «۳»

$$۲^{۵m+۱}=۳g\Rightarrow ۲^{۵m}\times ۲=۳g\Rightarrow ۲^{۵m}=\frac{۳}{۲}g$$

بنابراین:

$$۱۶^{\frac{۵m}{۲}}=(۲^{۴})^{\frac{۵m}{۲}}=۲^{۱۰m}=(۲^{۵m})^{۲}=(\frac{۳}{۲}g)^{۲}=\frac{۹}{۴}g^{۲}$$

۱۱۰. گزینهٔ «۱» اگر دو عبارت توان‌دار با پایه‌های مساوی با هم برابر باشند، توان آنها نیز با هم برابر است؛ پس:

$$۳۲^{x}\times ۲۷^{y}=۲۷\times ۱۶\Rightarrow ۲^{۵x}\times ۲۷^{y}=۲۷\times ۲^{۴}\Rightarrow y=۱,x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow xy=\frac{۴}{۵}\times ۱=\frac{۴}{۵}$$

۱۱۱. گزینهٔ «۳»

$$۸۱^{a}=۹\Rightarrow ۳^{۴a}=۳^{۲}\Rightarrow ۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$۲۵^{a-۱}=۵^{۲a-۲}=۵^{۱-۲}=۵^{-۱}$$

۱۱۲. گزینهٔ «۳»

نکته در معادلات توانی که مجهول در توان ظاهر می‌شود، دو طرف معادله را به دو عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان تبدیل می‌کنیم؛ سپس توان‌های دو طرف تساوی را مساوی قرار می‌دهیم. اگر نتوان پایه‌ها را مساوی کرد، فرض می‌کنیم که توان هر دو طرف تساوی برابر صفر است؛ زیرا هر عدد به توان صفر برابر یک است.

$$۹^{x+۱}=۲۷\times ۳^{x+۲}\Rightarrow ۳^{۲x+۲}=۳^{۳}\times ۳^{x+۲}\Rightarrow ۳^{۲x+۲}=۳^{x+۵}\xrightarrow{\text{طبق نکتهٔ بالا}}۲x+۲=x+۵\Rightarrow ۲x-x=۵-۲\Rightarrow x=۳$$

۹۳. گزینهٔ «۴»

$$S=x+x(\underbrace{x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots}_{S})\Rightarrow S=x+Sx\Rightarrow S-Sx=x\Rightarrow S(۱-x)=x\Rightarrow S=\frac{x}{۱-x}\xrightarrow{x=۰/۱}S=\frac{۰/۱}{۱-۰/۱}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۰/۱}{۰/۹}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S^{۲}=\frac{۱}{۸۱}$$

بنابراین:

$$S-S^{۲}=\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۸۱}=\frac{۹-۱}{۸۱}=\frac{۸}{۸۱}$$

۹۴. گزینهٔ «۲» مقدار a و b را در عبارت داده‌شده جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{-(۲)^{۳}-۴(-۳)^{۲}}{-۲(-۳)(۲)^{۲}-۲}=\frac{-۸-۴(۹)}{۶(۴)-۲}=\frac{-۸-۳۶}{۲۴-۲}=\frac{-۴۴}{۲۲}=-۲$$

۹۵. گزینهٔ «۳» عبارت A را در $(x-۱)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم؛ سپس با استفاده از اتحاد مزدوج در صورت کسر داریم:

$$A=\frac{(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)\cdots(x^{۳۲}+۱)}{(x-۱)}=\frac{(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)\cdots(x^{۳۲}+۱)}{(x-۱)}$$

$$=\frac{(x^{۴}-۱)(x^{۴}+۱)\cdots(x^{۳۲}+۱)}{(x-۱)}=\cdots=\frac{x^{۶۴}-۱}{x-۱}$$

$$\xrightarrow{x=۲}\frac{۲^{۶۴}-۱}{۲-۱}=۲^{۴n}-۱\Rightarrow ۲^{۶۴}\cancel{-۱}=۲^{۴n}\cancel{-۱}\Rightarrow ۲^{۴n}=۲^{۶۴}\Rightarrow ۴n=۶۴\Rightarrow n=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

بنابراین:

$$n+۱=۱۶+۱=۱۷$$

۹۶. گزینهٔ «۱»

$$x=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow x-۲=\sqrt{۳}$$

$$x^{۱۳۸۹}(x^{۲}-۴x+۱)-۲\xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن ۳}}x^{۱۳۸۹}(\underbrace{x^{۲}-۴x+۴}_{\text{اتحاد مربع کامل}}-۳)-۲=x^{۱۳۸۹}[(x-۲)^{۲}-۳]-۲$$

$$=x^{۱۳۸۹}[(\sqrt{۳})^{۲}-۳]-۲=\underbrace{x^{۱۳۸۹}(\underbrace{۳-۳}_{۰})}_{۰}-۲=-۲$$

۹۷. گزینهٔ «۴»

$$\frac{(۳^{x})^{۴y-۱}\times((۳^{x})^{۲})^{y+۱}}{(۳^{x})^{۲y+۲}}\xrightarrow{۳^{x}=۲}\frac{۲^{۴y-۱}\times(۲^{۲})^{y+۱}}{(۲)^{۲y+۲}}=\frac{۲^{۴y-۱}\times ۲^{۲y+۲}}{۲^{۲y+۲}}=\frac{۲^{۲y+۱}}{۲^{۲y+۲}}=۲^{۴y-۱}=\frac{۲^{۴y}}{۲}$$

$$=\frac{(۲^{y})^{۴}}{۲}\xrightarrow{۲^{y}=۶}\frac{۶^{۴}}{۲}=\frac{۶\times۶^{۳}}{۲}=۳\times۶^{۳}=۶۴۸$$

۹۸. گزینهٔ «۴» برای اینکه تساوی برقرار باشد، داریم:

$$m+۱=۳۱\Rightarrow m=۳۰$$

پس:

$$۳۱^{(۳۰+۱)}=(۳۰+۱)^{۳۱}\Rightarrow ۳۱^{۳۱}=۳۱^{۳۱}$$

۹۹. گزینهٔ «۲»

$$(۴^{y}\times۴-۱۹)^{۲x-۱}=(۲^{۲y}\times۴-۱۹)^{۲x-۱}=((۲^{y})^{۲}\times۴-۱۹)^{۲x-۱}\xrightarrow{۲^{y}=۵}(۵^{۲}\times۴-۱۹)^{۲x-۱}=(۱۰۰-۱۹)^{۲x-۱}$$

$$=۸۱^{۲x-۱}=(۳^{۴})^{۲x-۱}=۳^{۸x-۴}=\frac{۳^{۸x}}{۳^{۴}}=\frac{(۳^{x})^{۸}}{۳^{۴}}\xrightarrow{۳^{x}=۷}\frac{۷^{۸}}{۳^{۴}}=\frac{(۷^{۲})^{۴}}{۳^{۴}}=\frac{۴۹^{۴}}{۳^{۴}}=(\frac{۴۹}{۳})^{۴}=(۱۶\frac{۱}{۳})^{۴}$$

۱۰۰. گزینهٔ «۳»

$$۴^{x}=۹\Rightarrow ۲^{۲x}=۳^{۲}\Rightarrow ۲^{x}=۳$$

بنابراین:

$$(۲^{۲x-۱}-۲^{x-۱}-۱)^{۳x-۴}=(\frac{۲^{۲x}}{۲}-\frac{۲^{x}}{۲}-۱)^{۳x-۴}=(\frac{۹}{۲}-\frac{۳}{۲}-۱)^{۳x-۴}=۲^{۳x-۴}=\frac{۲^{۳x}}{۲^{۴}}=\frac{۳^{۳}}{۲^{۴}}=\frac{۲۷}{۱۶}$$

۱۱۳.گزینهٔ «۱»

$$۵^{۲m+۲}\times ۲^{۴n}=\frac{۲۵}{۱۰۰۰۰}\Rightarrow ۵^{۲m+۲}\times ۲^{۴n}=\frac{۱}{۴۰۰}\Rightarrow ۵^{۲m+۲}\times ۲^{۴n}=\frac{۱}{۲۰^{۲}}\Rightarrow ۵^{۲m+۲}\times ۲^{۴n}=\frac{۱}{(۲^{۲}\times ۵)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۵^{۲m+۲}\times ۲^{۴n}=\frac{۱}{۲^{۴}\times ۵^{۲}}\Rightarrow ۵^{۲m+۲}\times ۲^{۴n}=۵^{-۲}\times ۲^{-۴}\Rightarrow \begin{cases}۲m+۲=-۲\Rightarrow ۲m=-۴\Rightarrow m=-۲\\ ۴n=-۴\Rightarrow ۴n=-۴\Rightarrow n=-۱\end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{m+n}{۲}=\frac{-۲-۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۱۱۴.گزینهٔ «۴» با توجه به نکتهٔ سؤال ۱۱۲ داریم:

$$۳^{۲k-۲}(۱-۲\times ۳-۳^{۲})=-۱۴\Rightarrow ۳^{۲k-۲}\times(\cancel{-۱۴})=\cancel{-۱۴}\Rightarrow ۳^{۲k-۲}=۱\Rightarrow ۲k-۲=۰\Rightarrow ۲k=۲\Rightarrow k=۱$$

۱۱۵.گزینهٔ «۲» با توجه به نکتهٔ سؤال ۱۱۲ چون ۱۷ و ۱۹ تجزیه‌ناپذیرند، توان هر دو آنها باید صفر باشد تا تساوی برقرار شود؛ پس:

$$۱۷^{۲x-۵}=۱۹^{۲-۳y}\Rightarrow \begin{cases}۲x-۵=۰\Rightarrow ۲x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}\\ ۲-۳y=۰\Rightarrow ۳y=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۱۵}{۴}=۳\frac{۳}{۴}=۳/۷۵$$

۱۱۶.گزینهٔ «۱»

$$۲^{k+۵}(۱+۳)=۴^{k}\Rightarrow ۲^{k+۵}\times ۴=۲^{۲k}\Rightarrow ۲^{k+۵}\times ۲^{۲}=۲^{۲k}\Rightarrow ۲^{k+۷}=۲^{۲k}\Rightarrow k+۷=۲k\Rightarrow k=۷$$

۱۱۷.گزینهٔ «۲»

$$۲^{k-۱}-۲^{k-۲}=۳۲\Rightarrow ۲^{k}(۲^{-۱}-۲^{-۲})=۳۲\Rightarrow ۲^{k}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴})=۳۲\Rightarrow ۲^{k}\times\frac{۱}{۴}=۲^{۵}\Rightarrow ۲^{k}\times ۲^{-۲}=۲^{۵}$$

$$\Rightarrow ۲^{k-۲}=۲^{۵}\Rightarrow k-۲=۵\Rightarrow k=۷$$

بنابراین:

$$\frac{۲k}{۳}=\frac{۲\times ۷}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

۱۱۸.گزینهٔ «۳»

$$n^{nm}=n^{n^{n+۱}+n}\Rightarrow nm=n^{n+۱}+n\Rightarrow m=\frac{n^{n+۱}+n}{n}\Rightarrow m=\frac{n^{n+۱}}{n}+\frac{n}{n}\Rightarrow m=n^{n+۱-۱}+۱\Rightarrow m=n^{n}+۱$$

۱۱۹.گزینهٔ «۲»

$$((((۵^{۴})^{۲})^{۸})^{۲})^{n+۱}=۱\Rightarrow (۵^{۱۲۸})^{n+۱}=۱\Rightarrow ۵^{۱۲۸n+۱۲۸}=۱$$

هر عدد به توان صفر برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$۱۲۸n+۱۲۸=۰\Rightarrow ۱۲۸n=-۱۲۸\Rightarrow n=-۱$$

۱۲۰.گزینهٔ «۲»

$$m^{m^{m}}=۲^{۴}\Rightarrow m^{m^{m}}=۲^{۲^{۲}}\Rightarrow m=۲$$

۱۲۱.گزینهٔ «۴»

$$x^{۸۴}=۸^{۲۸}\Rightarrow x^{۸۴}=(۲^{۳})^{۲۸}\Rightarrow x^{۸۴}=۲^{۸۴}\Rightarrow x=\pm ۲$$

چون توان x زوج است، هم مقدار مثبت و هم مقدار منفی برای x قابل قبول است.

۱۲۲.گزینهٔ «۱»

$$\frac{۳۷\times ۵^{۲۰}-۱۲\times ۵^{۲۰}}{(\frac{۲}{۱۰})^{-۸}\div(\frac{۴}{۱۰۰})^{x}}=\frac{۸}{۱۰۰۰}\Rightarrow \frac{۵^{۲۰}(۳۷-۱۲)}{(\frac{۱}{۵})^{-۸}\div(\frac{۱}{۲۵})^{x}}=\frac{۱}{۱۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۵^{۲۰}\times ۲۵}{(۵^{-۱})^{-۸}\div ۲۵^{-x}}=\frac{۱}{۵^{۳}}\Rightarrow \frac{۵^{۲۰}\times ۵^{۲}}{۵^{۸}\div ۵^{-۲x}}=۵^{-۳}\Rightarrow \frac{۵^{۲۲}}{۵^{۸+۲x}}=۵^{-۳}\Rightarrow ۵^{۲۲-(۸+۲x)}=۵^{-۳}$$

$$\Rightarrow ۵^{۲۲-۸-۲x}=۵^{-۳}\Rightarrow ۵^{۱۴-۲x}=۵^{-۳}\Rightarrow ۱۴-۲x=-۳\Rightarrow -۲x=-۱۷\Rightarrow x=\frac{-۱۷}{-۲}\Rightarrow x=۸/۵$$

۱۲۳.گزینهٔ «۴» مخرج کسر برابر است با:

$$۱+۲+۴+۸+\cdots+۲^{۳۱}=S\Rightarrow ۲S=\underbrace{۲+۲^{۲}+۲^{۳}+۲^{۴}+\cdots+۲^{۳۱}}_{S-۱}+۲^{۳۲}\Rightarrow ۲S-S=۲^{۳۲}-۱\Rightarrow S=۲^{۳۲}-۱$$

صورت و مخرج را در (۱−۲) ضرب می‌کنیم؛ بنابراین:

$$\frac{\overbrace{(۲-۱)(۲+۱)}^{\text{اتحاد مزدوج}}(۲^{۲}+۱)(۲^{۴}+۱)\cdots(۲^{۱۶}+۱)}{(۲-۱)(۲^{۳۲}-۱)}=(\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰})^{x+۲}\Rightarrow\frac{\overbrace{(۲^{۲}-۱)(۲^{۲}+۱)}^{\text{اتحاد مزدوج}}(۲^{۴}+۱)\cdots(۲^{۱۶}+۱)}{۲^{۳۲}-۱}=(\frac{۱}{۱۶})^{x+۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\overbrace{(۲^{۴}-۱)(۲^{۴}+۱)}^{\text{اتحاد مزدوج}}\cdots(۲^{۱۶}+۱)}{۲^{۳۲}-۱}=(۲^{-۴})^{x+۲}\Rightarrow\frac{\cancel{۲^{۳۲}-۱}}{\cancel{۲^{۳۲}-۱}}=۲^{-۴x-۸}\Rightarrow ۲^{-۴x-۸}=۱$$

هر عدد به توان صفر برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$\Rightarrow -۴x-۸=۰\Rightarrow x=-۲$$

۱۲۴.گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases}(۵^{۳})^{۲x-۳}=۵^{۴}\times(\frac{۲}{۱۰})^{۴y-۱}\Rightarrow ۵^{۶x-۹}=۵^{۴}\times(\frac{۱۰}{۲})^{۱-۴y}\Rightarrow ۵^{۶x-۹}=۵^{۴}\times ۵^{۱-۴y}\Rightarrow ۵^{۶x-۹}=۵^{۵-۴y}\\ ۱۷^{-x-۲y+۱}=(۱۷^{-۱})^{۲x+۳}\Rightarrow ۱۷^{-x-۲y+۱}=۱۷^{-۲x-۳}\end{cases}$$

در دو معادلهٔ بالا، پایه‌های دو طرف تساوی با هم برابر است؛ بنابراین توان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}۶x-۹=۵-۴y\Rightarrow ۶x=-۴y+۱۴\\ -x-۲y+۱=-۲x-۳\Rightarrow x=۲y-۴\end{array}\right\}\Rightarrow ۶(۲y-۴)=-۴y+۱۴\Rightarrow ۱۲y+۴y=۲۴+۱۴\Rightarrow ۱۶y=۳۸\Rightarrow y=\frac{۱۹}{۸}\ ,\ x=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین:

$$۴x-۸y=۴(\frac{۳}{۴})-۸(\frac{۱۹}{۸})=۳-۱۹=-۱۶$$

۱۲۵.گزینهٔ «۳»

$$(۲^{۲})^{۱۱۵۶}+(۲^{۵})^{۴۶۳}+۲^{۲۳۱۳}=(۲^{۱۰})^{m}\times ۱۱\Rightarrow ۲^{۲۳۱۲}+۲^{۲۳۱۵}+۲^{۲۳۱۳}=۲^{۱۰m}\times ۱۱\Rightarrow ۲^{۲۳۱۲}(\underbrace{۱+۲^{۳}+۲}_{۱۱})=۲^{۱۰m}\times ۱۱$$

$$\Rightarrow ۲^{۲۳۱۲}=۲^{۱۰m}\Rightarrow ۱۰m=۲۳۱۲\Rightarrow m=\frac{۲۳۱۲}{۱۰}=۲۳۱/۲$$

۱۲۶.گزینهٔ «۴»

$$۲^{m}+۳^{m}-۲^{۲m}+۲^{m}\times ۳^{m}-۳^{۲m}=۱\xrightarrow{۲^{m}=a\ ,\ ۳^{m}=b}a+b-a^{۲}+ab-b^{۲}=۱$$

$$\xrightarrow{\times ۲}۲a+۲b-۲a^{۲}+۲ab-۲b^{۲}=۲\Rightarrow a^{۲}+a^{۲}+b^{۲}+b^{۲}-۲ab-۲a-۲b+۱+۱=۰$$

$$\Rightarrow -۲a-۲b+۲a^{۲}-۲ab+۲b^{۲}=-۲\Rightarrow\underbrace{a^{۲}-۲ab+b^{۲}}_{(a-b)^{۲}}+\underbrace{a^{۲}-۲a+۱}_{(a-۱)^{۲}}+\underbrace{b^{۲}-۲b+۱}_{(b-۱)^{۲}}=۰\Rightarrow\begin{cases}a-b=۰\Rightarrow a=b\\ a-۱=۰\Rightarrow a=۱\\ b-۱=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}$$

بنابراین:

$$۲^{m}=۳^{m}=۱\Rightarrow m=۰$$

۱۲۷.گزینهٔ «۲» ابتدا مقدار A را محاسبه می‌کنیم؛ برای محاسبهٔ مقدار A از کمترین توان در صورت و مخرج کسر فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{۲^{۱۰}\cancel{(۱+۲+۲^{۲}+\cdots+۲^{۱۰})}}{۲^{-۲۰}\cancel{(۲^{۱۰}+۲^{۹}+۲^{۸}+\cdots+۱)}}=۲^{۳۰}$$

با جایگذاری مقدار A در عبارت داده‌شده یک معادله بر حسب x به‌دست می‌آید؛ بنابراین:

$$(۲^{\frac{۱}{۲}})^{x-۲(۲^{۳۰})}=\frac{۲^{۳۰}\times ۲^{-۱۰}}{۲^{۲۰}}\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{۲}(x-۲^{۳۱})}=\frac{۲^{۲۰}}{۲^{۲۰}}=۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}(x-۲^{۳۱})=۰\Rightarrow x-۲^{۳۱}=۰\Rightarrow x=۲^{۳۱}$$

۱۲۸.گزینهٔ «۱»

$$\frac{(۵^۳\times۲)^۶\times(۲^۲\times۵^۲)^x\times(۵^۲\times۲)^۵}{(۲^۳\times۵^۲)^۳\times(۵^۲\times۲)^۴\times(۵^۲)^۸}=۲^{۱۰}\times۵^{۱۰}\Rightarrow\frac{۵^{۱۸}\times۲^۶\times۲^{۲x}\times۵^{۲x}\times۵^{۱۰}\times۲^۵}{۲^۹\times۵^۶\times۵^۸\times۲^۴\times۵^{۱۶}}=۲^{۱۰}\times۵^{۱۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۵^{۲x+۲۸}\times۲^{۲x+۱۱}}{۵^{۳۰}\times۲^{۱۳}}=۲^{۱۰}\times۵^{۱۰}\Rightarrow۵^{۲x-۲}\times۲^{۲x-۲}=۲^{۱۰}\times۵^{۱۰}\Rightarrow۲x-۲=۱۰\Rightarrow x=۶$$

۱۲۹.گزینهٔ «۳»

$$(\frac{۲}{۳})^{۳x+۱}\div((\frac{۲}{۳})^۲)^{x+۳}=(\frac{۳}{۲})^{۱-۲x}\Rightarrow(\frac{۲}{۳})^{۳x+۱}\div(\frac{۲}{۳})^{۲x+۶}=(\frac{۲}{۳})^{۲x-۱}$$

$$\Rightarrow(\frac{۲}{۳})^{(۳x+۱)-(۲x+۶)}=(\frac{۲}{۳})^{۲x-۱}\Rightarrow(\frac{۲}{۳})^{x-۵}=(\frac{۲}{۳})^{۲x-۱}\Rightarrow x-۵=۲x-۱\Rightarrow x=-۴$$

۱۳۰.گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{array}{l}(۲^۳)^{۲x+۱}=۲^۵\times۲^{۴y+۱۲}\Rightarrow۲^{۶x+۳}=۲^{۴y+۱۷}\Rightarrow۶x+۳=۴y+۱۷\\ ۵^{x-y+۱}=(۵^۲)^{\frac{۲y+۱}{۲}}\Rightarrow۵^{x-y+۱}=۵^{۲y+۱}\Rightarrow x-y+۱=۲y+۱\Rightarrow x=۳y\end{array}\right\}\Rightarrow x=۳\ ,\ y=۱$$

بنابراین:

$$x-y+۳=۳-۱+۳=۵$$

۱۳۱.گزینهٔ «۲»

$$(\frac{۲۵}{۱۰۰})^{۱-a}\times(۲^۴\times۵)^{-a}=(\frac{۱}{۱۰})^{a+۲}\times(\frac{۲}{۱۰})^{-۲}\Rightarrow(\frac{۱۰۰}{۲۵})^{a-۱}\times۲^{-۴a}\times۵^{-a}=۱۰^{-a-۲}\times(\frac{۱۰}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow۴^{a-۱}\times۲^{-۴a}\times۵^{-a}=(۲\times۵)^{-a-۲}\times۵^۲\Rightarrow(۲^۲)^{a-۱}\times۲^{-۴a}\times۵^{-a}=۲^{-a-۲}\times۵^{-a-۲}\times۵^۲$$

$$\Rightarrow۲^{۲a-۲}\times۲^{-۴a}\times۵^{-a}=۲^{-a-۲}\times۵^{-a-۲+۲}\Rightarrow۲^{۲a-۲-۴a}\times\cancel{۵^{-a}}=۲^{-a-۲}\times\cancel{۵^{-a}}$$

$$\Rightarrow-۲a\cancel{-۲}=-a\cancel{-۲}\Rightarrow-۲a+a=۰\Rightarrow a=۰$$

بنابراین:

$$\frac{a-۳}{۵}=\frac{۰-۳}{۵}=-\frac{۳}{۵}$$

۱۳۲.گزینهٔ «۴»

نکته

برای محاسبهٔ درستی جذر دو روش وجود دارد:

① حاصل جذر را در خودش ضرب کرده و با باقی‌مانده جمع می‌کنیم؛ عدد به‌دست آمده باید با عدد زیر رادیکال برابر شود:

$$\begin{array}{c|l}\sqrt{a}&b\\ c&\end{array}\Rightarrow a=b^۲+c$$

② حاصل جذر را در ۲ ضرب کرده و با ۱ جمع می‌کنیم؛ عدد به‌دست آمده باید بزرگ‌تر از باقی‌مانده شود:

$$۲b+۱>c$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۲/۲^۲+۰/۰۳=۴/۸۴+۰/۰۳=۴/۸۷$$

۱۳۳.گزینهٔ «۲»

$$\frac{۲}{۳}\sqrt{x}=۱۱۸\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{\overset{۵۹}{\cancel{۱۱۸}}\times۳}{\cancel{۲}}\Rightarrow\sqrt{x}=۱۷۷\Rightarrow x=۱۷۷^۲$$

۱۳۴.گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{m}=۵/۲\rightarrow m=۵/۲^۲\\ \sqrt{n}=۴/۲\Rightarrow n=۴/۲^۲\end{array}\right\}\Rightarrow m-n=۵/۲^۲-۴/۲^۲\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\overset{۱}{(\cancel{۵/۲-۴/۲})}(۵/۲+۴/۲)=۹/۴$$

۱۳۵. گزینهٔ «۲» چون $۲۵۳۰۰۹ = ۵۰۳^۲$ ؛ بنابراین جذر تقریبی ۲۵۳۰۰۸ حتماً ۵۰۲ است؛ پس با توجه به نکتهٔ سؤال ۱۳۲ داریم:

$$a = b^۲ + c \Rightarrow ۲۵۳۰۰۸ = (۵۰۲)^۲ + c \Rightarrow c = ۲۵۳۰۰۸ - ۲۵۲۰۰۴ = ۱۰۰۴$$

۱۳۶. گزینهٔ «۱» طبق نکتهٔ سؤال ۱۳۲ داریم:

$$۶۵ \times ۲ + ۱ = ۱۳۱ > ۱۳۰$$

۱۳۷. گزینهٔ «۴»

نکته ریشهٔ دوم هر عدد حقیقی مثبت مانند a برابر با $\pm\sqrt{a}$ است.

$\pm۱۱ =$ ریشهٔ دوم ۱۲۱ (زیرا $(-۱۱)^۲ = ۱۲۱ \ , \ (۱۱)^۲ = ۱۲۱$)

۱۳۸. گزینهٔ «۴» با توجه به نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$\sqrt{a} + (-\sqrt{a}) = ۰$$

۱۳۹. گزینهٔ «۲»

نکته برای ریشه‌گیری از عددهای توان‌دار می‌توانیم از رابطهٔ مقابل استفاده کنیم: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt{(-۸)^۴} = (-۸)^۲ = ۶۴$$

۱۴۰. گزینهٔ «۳»

نکته رادیکال‌هایی با فرجهٔ زوج، دو ریشه دارند که قرینهٔ یکدیگرند، اما رادیکال‌هایی با فرجهٔ فرد، یک ریشه دارند.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

۱۴۱. گزینهٔ «۴»

نکته جذر عددهای بین صفر و ۱ از خود آن عددها بزرگ‌تر است (عددهای بین صفر و یک با توان‌رسانی، کوچک و با ریشه‌گیری، بزرگ می‌شوند).

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{۱}{۳} < a < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ < a < ۱ \Rightarrow \sqrt{a} > a$$

۱۴۲. گزینهٔ «۳»

نکته تعداد رقم‌های اعشاری جذر همواره نصف تعداد رقم‌های اعشاری مجذور است.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt{۰/\underbrace{\underbrace{۰۰۰\cdots۰۰}_{\text{۵۰۱تا}}۱۶۹}_{\text{۵۰۴تا}}} = ۰/\underbrace{\underbrace{۰۰\cdots۰۰}_{\text{۲۵۰تا}}۱۳}_{\text{۲۵۲تا}}$$

۱۴۳. گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{۴} = ۲ \\ \sqrt{۹} = ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{۴} < \sqrt{۵} < \sqrt{۹} \Rightarrow ۲ < \sqrt{۵} < ۳$$

۱۴۴. گزینهٔ «۴»

$$n - ۱ + \sqrt{(n+۱)^۲} = n - ۱ + n + ۱ = ۲n$$

۱۴۵. گزینهٔ «۱»

$$\sqrt{۲(۳)+۳(۲)+۴}=\sqrt{۱۶}=۴$$

۱۴۶. گزینهٔ «۲»

$$\sqrt[۳]{۲۲+۵}=\sqrt[۳]{۲۷}=\sqrt[۳]{۳^{۳}}=۳^{\frac{۳}{۳}}=۳$$

۱۴۷. گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{\text{مساحت مربع}}=\text{طول ضلع مربع}\Rightarrow\text{طول ضلع مربع}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۲۵}\times ۰/۰۰۸۱\times\underbrace{۱۰۰۰۰}_{\text{یک هکتار}}}=\frac{۱۰}{۵}\times ۰/۰۹\times ۱۰۰=۲\times ۰/۰۹\times ۱۰۰=۱۸\ \text{متر}$$

بنابراین:

$$\text{محیط زمین}=۱۸\times ۴=۷۲\ \text{متر}$$

۱۴۸. گزینهٔ «۴»

$$A=۲\sqrt{۳+\underbrace{۲\sqrt{۳+۲\sqrt{۳+\cdots}}}_{A}}\Rightarrow A=۲\sqrt{۳+A}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^{۲}=۴(۳+A)\Rightarrow A^{۲}=۱۲+۴A\Rightarrow A^{۲}-۴A-۱۲=۰$$

با استفاده از اتحاد یک جملهٔ مشترک داریم:

$$(A-۶)(A+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}A-۶=۰\Rightarrow A=۶\\ A+۲=۰\Rightarrow A=-۲\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۴۹. گزینهٔ «۴»

$$B=۱۱\sqrt{۱۱B}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}B^{۲}=۱۱^{۲}(۱۱B)\xrightarrow{\div B}B=۱۱^{۳}$$

۱۵۰. گزینهٔ «۳»

نکته

به حاصل عددهای توان‌دار روبه‌رو توجه کنید:

$$۱^{۲}=۱$$
$$۱۱^{۲}=۱۲۱$$
$$۱۱۱^{۲}=۱۲۳۲۱$$
$$۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۳۲۱$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{۱۱\cdots۱}_{\text{۹ تا}}{}^{۲}=۱۲۳\cdots۹۸۷\cdots۱$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۱۲۳۴\cdots۹۸۷\cdots۱}=۱۱۱۱۱۱۱۱۱\\ \sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱}=۱۱۱۱۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۱۱۱۱۱۱۱۱۱-۱۱۱۱۱=۱۱۱۱۰۰۰۰۰$$

۱۵۱. گزینهٔ «۱»

$$\text{مساحت هر مربع}=\frac{۸۱۰}{۱۰}=۸۱\Rightarrow\text{طول هر ضلع}=\sqrt{۸۱}=۹\Rightarrow\text{محیط شکل}=۱۶\times ۹=۱۴۴\ \text{متر}$$

۱۵۲. گزینهٔ «۳»

$$۳^{x}=۳^{۲}\Rightarrow x=۲\Rightarrow ۷\sqrt{۵^{\sqrt{۳+۱}}}=۷\sqrt{۵^{۲}}=۷\times ۵=۳۵$$

۱۵۳. گزینهٔ «۲»

$$\sqrt[۵]{۳^{۱۰}a^{۵}a^{۲}b^{۱۰}c^{۱۰}c}=۳^{۲}ab^{۲}c^{۲}\sqrt[۵]{a^{۲}c}=۹ab^{۲}c^{۲}\sqrt[۵]{a^{۲}c}$$

۱۵۴. گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{\frac{۳^{-۴}+۲^{-۶}}{-(۳^{-۴}-۲^{-۶})}}=\sqrt{\frac{\frac{۱}{۳^{۴}}+\frac{۱}{۲^{۶}}}{-(\frac{۱}{۳^{۴}}-\frac{۱}{۲^{۶}})}}=\sqrt{\frac{\frac{۱}{۸۱}+\frac{۱}{۶۴}}{-(\frac{۱}{۸۱}-\frac{۱}{۶۴})}}=\sqrt{\frac{\frac{۶۴+۸۱}{\cancel{۸۱\times۶۴}}}{-(\frac{۶۴-۸۱}{\cancel{۸۱\times۶۴}})}}=\sqrt{\frac{۱۴۵}{۱۷}}$$

۱۵۵. گزینهٔ «۱»

$$S_{\frac{۱}{۴}\text{دایره}}=\frac{۱}{۴}\pi r^{۲}\Rightarrow ۱۲/۵۶=\frac{۱}{۴}\times ۳/۱۴\times r^{۲}\Rightarrow r^{۲}=\frac{۱۲/۵۶\times ۴}{۳/۱۴}=۱۶\Rightarrow r=۴$$

بنابراین:

$$\text{محیط ربع دایره}=(\frac{\text{محیط دایره}}{۴})+۲r=\frac{۸\pi}{۴}+۸=۲\pi+۸=۲(\pi+۴)$$

۱۵۶.گزینهٔ «۴»

$$(۱۵۶۲۵^{۲۴})^{۳}=۱۵۶۲۵^{۷۲}=(۵^{۶})^{۷۲}=۵^{۶\times ۷۲}\Rightarrow \sqrt{۵^{۶\times ۷۲}}=۵^{\frac{۶\times ۷۲}{۲}}=۵^{۲۱۶}$$

۱۵۷.گزینهٔ «۲»

$$S_{\text{مربع}}=\frac{(\text{قطر})^{۲}}{۲}\Rightarrow S_{\text{مربع}}=\frac{\sqrt{۱۰۰۰}^{\,۲}}{۲}=\frac{۱۰۰۰}{۲}=۵۰۰$$

۱۵۸.گزینهٔ «۳» ابتدا عددها را گرد می‌کنیم؛ سپس از آنها جذر گرفته و ساده‌شان می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲۵}}{۶^{۲}}\times\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=\frac{۵}{۳۶}\times\frac{۴}{۲}=\frac{۵}{\underset{۱۸}{\cancel{۳۶}}}\times\frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{۱}=\frac{۵}{۱۸}$$

۱۵۹.گزینهٔ «۳» ابتدا با روش گرد کردن، عددهای زیر رادیکال را تقریب می‌زنیم؛ سپس جذر گرفته و حاصل عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{۹}}{\sqrt{\sqrt{۸۱}+۷}}\times\frac{\sqrt{۶۴}}{\sqrt{\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۳۶}}}=\frac{۳}{\sqrt{۹+۷}}\times\frac{۸}{\sqrt{۱۰-۶}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۶}}\times\frac{۸}{\sqrt{۴}}=\frac{۳}{\cancel{۴}}\times\frac{\overset{\cancel{۴}}{\cancel{۸}}}{\cancel{۲}}=۳$$

۱۶۰.گزینهٔ «۱»

$$(\sqrt[۳]{۳^{۴}})^{۷}\times ۴\times(\sqrt[۴]{۲^{۸}})^{۸}=\sqrt[۳]{۳^{۲۸}}\times ۲^{۲}\times(۲^{۲})^{۸}=\sqrt[۳]{۳^{۲۷}\times ۳}\times ۲^{۱۸}=۳^{۹}\sqrt[۳]{۳}\times ۲^{۱۸}=۳^{۹}\times(۲^{۲})^{۹}\times\sqrt[۳]{۳}=۱۲^{۹}\times\sqrt[۳]{۳}$$

۱۶۱.گزینهٔ «۴»

$$\frac{\sqrt{۱+۷\sqrt{۷۴+\sqrt{۲۹+۵\sqrt{۲۲-۶}}}}}{۲}=\frac{\sqrt{۱+۷\sqrt{۷۴+\sqrt{۲۹+۵\sqrt{۱۶}}}}}{۲}=\frac{\sqrt{۱+۷\sqrt{۷۴+\sqrt{۴۹}}}}{۲}=\frac{\sqrt{۱+۷\sqrt{۸۱}}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴}}{۲}=۴$$

۱۶۲.گزینهٔ «۲»

$$\sqrt{۶۴}<\sqrt{۷۹}<\sqrt{۸۱}\Rightarrow ۸<\sqrt{۷۹}<۹\xrightarrow{+۳}۳+۸<۳+\sqrt{۷۹}<۳+۹\Rightarrow ۱۱<۳+\sqrt{۷۹}<۱۲$$

۱۶۳.گزینهٔ «۱»

$$\sqrt{۴۹}<\sqrt{۵۷}<\sqrt{۶۴}\Rightarrow ۷<\sqrt{۵۷}<۸\xrightarrow{\times(-)}-۷>-\sqrt{۵۷}>-۸\xrightarrow{-۲}-۹>-۲-\sqrt{۵۷}>-۱۰$$

۱۶۴.گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{۵۰۰}\simeq ۲۲/۳\\ \sqrt{۱۵۰۰}\simeq ۳۸/۷\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{زوج } n]{\sqrt{۵۰۰}<n<\sqrt{۱۵۰۰}}n=۲۴,۲۶,۲۸,\dots,۳۸\Rightarrow \text{تعداد}=(\frac{۳۸-۲۴}{۲})+۱=۸$$

۱۶۵.گزینهٔ «۲»

$$\sqrt{۴۵۰}=\sqrt{۲\times ۳^{۲}\times ۵^{۲}}=۳\times ۵\sqrt{۲}=۱۵\sqrt{۲}$$

۱۶۶.گزینهٔ «۴»

$$۹۰<\sqrt{n}<۱۰۰\Rightarrow ۹۰^{۲}<n<۱۰۰^{۲}\Rightarrow ۸۱۰۰<n<۱۰۰۰۰\Rightarrow n=۸۱۰۱,۸۱۰۲,\dots,۹۹۹۹\Rightarrow \text{تعداد}=(\frac{۹۹۹۹-۸۱۰۱}{۱})+۱=۱۸۹۹$$

۱۶۷.گزینهٔ «۳»

نکته

$$a\sqrt[n]{b^{m}}=\sqrt[n]{a^{n}b^{m}}$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۲\sqrt[۴]{۱۰}=\sqrt[۴]{۲^{۴}\times ۱۰}=\sqrt[۴]{۱۶۰}$$

۱۶۸.گزینهٔ «۱»

$$۲۱^{۲}=۴۴۱<۴۴۴<۲۲^{۲}=۴۸۴\Rightarrow\sqrt{۴۴۱}<\sqrt{۴۴۴}<\sqrt{۴۸۴}\Rightarrow ۲۱<\sqrt{۴۴۴}<۲۲$$

۱۶۹.گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{۰/۰۰۰۰۴۰}=\sqrt{\frac{۴۰}{۱۰۰۰۰۰۰}}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۱۰۰۰}\xrightarrow{۶<\sqrt{۴۰}<۷}\frac{\sqrt{۴۰}}{۱۰۰۰}\simeq\frac{۶/۳}{۱۰۰۰}\simeq ۰/۰۰۶۳$$

۱۷۰.گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{۰/۰۲۵}=\sqrt{۰/۰۲۵۰}=\frac{\sqrt{۲۵۰}}{\sqrt{۱۰۰۰۰}}=\frac{\sqrt{۲۵۰}}{۱۰۰}\xrightarrow{۱۵/۸<\sqrt{۲۵۰}<۱۵/۹}\frac{\sqrt{۲۵۰}}{۱۰۰}\simeq\frac{۱۵/۸}{۱۰۰}=۰/۱۵۸$$

۱۷۱. گزینهٔ «۳» با توجه به نکتهٔ سؤال‌های ۱۴۲ و ۱۵۰ داریم:

$$\sqrt{۱/۲۳۴۵۶۷۶۵۴۳۲۱}=۱/۱۱۱۱۱۱$$

۱۷۲. گزینهٔ «۴»

توجه: جذر عددهای سه‌رقمی هیچ‌گاه سه‌رقمی نمی‌شود.

۱۷۳. گزینهٔ «۱»

> **نکته** **به عبارت‌های رادیکالی که در آنها فرجه و عبارت‌های زیر رادیکال مساوی باشند، رادیکال‌های مشابه می‌گویند. برای جمع و تفریق عبارت‌های رادیکالی، با تجزیهٔ عبارت‌های زیر رادیکال و ساده کردن و خارج کردن آنها (در صورت امکان)، می‌توانیم ضریب رادیکال‌های مشابه را با هم جمع و تفریق کنیم.**

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt{۴\times۵}+۳\sqrt{۲۵\times۵}-۲\sqrt{۵}+\sqrt{۹\times۵}=\cancel{۲\sqrt{۵}}+۳(۵)\sqrt{۵}-\cancel{۲\sqrt{۵}}+۳\sqrt{۵}=۱۸\sqrt{۵}$$

۱۷۴. گزینهٔ «۳» طبق نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$۵(-۳\sqrt{۲}+\sqrt{۲۵\times۲}-۶\sqrt{۲})=۵(-۳\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}-۶\sqrt{۲})=۵(-۴\sqrt{۲})=-۲۰\sqrt{۲}$$

۱۷۵. گزینهٔ «۳»

$$۷(\sqrt{۷۵}-۳\sqrt{۲۷})=۷(\sqrt{۲۵\times۳}-۳\sqrt{۹\times۳})=۷(۵\sqrt{۳}-۳(۳)\sqrt{۳})=۷(۵\sqrt{۳}-۹\sqrt{۳})=۷(-۴\sqrt{۳})=-۲۸\sqrt{۳}$$

۱۷۶. گزینهٔ «۲»

$$۲\sqrt[۴]{۲^۴\times۲}-\sqrt[۳]{۳^۳\times۳}+۲\sqrt[۴]{۲^۸\times۲}-۵\sqrt[۳]{۳}=۲(۲)\sqrt[۴]{۲}-۳\sqrt[۳]{۳}+۲(۲^۲)\sqrt[۴]{۲}-۵\sqrt[۳]{۳}=۱۶\sqrt[۴]{۲}-۸\sqrt[۳]{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۸}(۱۶\sqrt[۴]{۲}-۸\sqrt[۳]{۳})=۲\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۳]{۳}$$

۱۷۷. گزینهٔ «۱»

$$۵\sqrt[۳]{۴}-۲\sqrt[۳]{۲^۳\times۲^۲}-\sqrt[۳]{۳^۳\times۲^۲}=۵\sqrt[۳]{۴}-۲(۲)\sqrt[۳]{۴}-۳\sqrt[۳]{۴}=۵\sqrt[۳]{۴}-۴\sqrt[۳]{۴}-۳\sqrt[۳]{۴}=-۲\sqrt[۳]{۴}$$

۱۷۸. گزینهٔ «۴»

$$\frac{۵\sqrt[۶]{۲^۶}-۳\sqrt{۳۶\times۲}+۸\sqrt[۶]{۲^۳}}{۱۰}=\frac{۱۰-۳(۶)\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}}{۱۰}=\frac{۱۰-۱۸\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}}{۱۰}=\frac{۱۰-۱۰\sqrt{۲}}{۱۰}=۱-\sqrt{۲}$$

۱۷۹. گزینهٔ «۲» به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$(۲-\sqrt{۳})^{۱۷}(۲+\sqrt{۳})^{۱۷}=(۲^۲-(\sqrt{۳})^۲)^{۱۷}=(۴-۳)^{۱۷}=۱^{۱۷}=۱$$

۱۸۰. گزینهٔ «۲»

$$(۶+\sqrt{۳۵})^{\frac{۱}{۳}}\sqrt[۳]{(۶-\sqrt{۳۵})}=(۶+\sqrt{۳۵})^{\frac{۱}{۳}}(۶-\sqrt{۳۵})^{\frac{۱}{۳}}=((۶+\sqrt{۳۵})(۶-\sqrt{۳۵}))^{\frac{۱}{۳}}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(۳۶-۳۵)^{\frac{۱}{۳}}=۱^{\frac{۱}{۳}}=۱$$

۱۸۱. گزینهٔ «۱»

$$\underbrace{(\sqrt{۶}-\sqrt{۷})^{۱۵}(\sqrt{۶}+\sqrt{۷})^{۱۵}}_{\text{اتحاد مزدوج}}(\sqrt{۶}+\sqrt{۷})^۲=(۶-۷)^{۱۵}\underbrace{(\sqrt{۶}+\sqrt{۷})^۲}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=(-۱)^{۱۵}(۶+۲\sqrt{۴۲}+۷)=-۱۳-۲\sqrt{۴۲}$$

۱۸۲. گزینهٔ «۱»

$$\frac{[۲-\cancel{\sqrt{۶}}-۳+\cancel{\sqrt{۶}}]^{۳۶۶۴}}{۲}=\frac{(-۱)^{۳۶۶۴}}{۲}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۱۸۳. گزینهٔ «۲» به کمک اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای داریم:

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲=(\sqrt{۳})^۲-۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲})+(\sqrt{۲})^۲=۳-۲\sqrt{۶}+۲=۵-۲\sqrt{۶}$$

بنابراین:

$$(۵+۲\sqrt{۶})^۲(۵-۲\sqrt{۶})=(۵+۲\sqrt{۶})\underbrace{(۵+۲\sqrt{۶})(۵-۲\sqrt{۶})}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(۵+۲\sqrt{۶})(۲۵-۲۴)=۵+۲\sqrt{۶}$$

۱۸۴. گزینهٔ «۴»

$$\frac{۲}{۵}\sqrt[۳]{۵^۳\times۵}+۲\sqrt[۳]{۲^۳\times۵}-\sqrt[۶]{۵^۲}-۲\sqrt[۳]{۳^۳\times۵}=\frac{۲}{\cancel{۵}}(\cancel{۵})\sqrt[۳]{۵}+۲(۲)\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۵}-۲(۳)\sqrt[۳]{۵}=-\sqrt[۳]{۵}$$

۱۸۵.گزینهٔ «۴»

نکته اگر در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها فرجه مشترک نبود، باید فرجهٔ مشترک بگیریم.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt[۳۰]{۲}\times\sqrt{۸}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۵]{۱۶}=\sqrt[۳۰]{۲}\times\sqrt{۲^{۳}}\times\sqrt[۳]{۲^{۲}}\times\sqrt[۵]{۲^{۴}}=\sqrt[۳۰]{۲}\times\sqrt[۲\times۱۵]{۲^{۳\times۱۵}}\times\sqrt[۳\times۱۰]{۲^{۲\times۱۰}}\times\sqrt[۵\times۶]{۲^{۴\times۶}}$$

$$=\sqrt[۳۰]{۲}\times\sqrt[۳۰]{۲^{۴۵}}\times\sqrt[۳۰]{۲^{۲۰}}\times\sqrt[۳۰]{۲^{۲۴}}=\sqrt[۳۰]{۲\times۲^{۴۵}\times۲^{۲۰}\times۲^{۲۴}}=\sqrt[۳۰]{۲^{۹۰}}=۲^{\frac{۹۰}{۳۰}}=۲^{۳}=۸$$

۱۸۶.گزینهٔ «۲» با توجه به نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$\sqrt{۳^{۳}}\times\sqrt[۴]{x^{۱}}=\sqrt[۶]{۳^{۲}}\times\sqrt[۸]{۳^{۴}}\Rightarrow\sqrt[۴\times۶]{x^{۱\times۶}}=\frac{\sqrt[۶\times۴]{۳^{۲\times۴}}\times\sqrt[۸\times۳]{۳^{۴\times۳}}}{\sqrt[۲\times۱۲]{۳^{۳\times۱۲}}}\Rightarrow\sqrt[۲۴]{x^{۶}}=\frac{\sqrt[۲۴]{۳^{۸}}\times\sqrt[۲۴]{۳^{۱۲}}}{\sqrt[۲۴]{۳^{۳۶}}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[۲۴]{x^{۶}}=\frac{\sqrt[۲۴]{۳^{۸}\times۳^{۱۲}}}{\sqrt[۲۴]{۳^{۳۶}}}\Rightarrow\sqrt[۲۴]{x^{۶}}=\frac{\sqrt[۲۴]{۳^{۲۰}}}{\sqrt[۲۴]{۳^{۳۶}}}\Rightarrow\sqrt[۲۴]{x^{۶}}=\sqrt[۲۴]{\frac{۳^{۲۰}}{۳^{۳۶}}}\Rightarrow\sqrt[۲۴]{x^{۶}}=\sqrt[۲۴]{۳^{-۱۶}}\Rightarrow x^{۶}=۳^{-۱۶}$$

۱۸۷.گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{۱\times۲\times۳\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۴}}{۲^{۲}}\times۵\times\underbrace{۲\times۳}_{۶}\times۷\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۸}}{۲^{۳}}\times۳^{۲}\times\underbrace{۲\times۵}_{۱۰}}=\sqrt{۲^{۸}\times۳^{۴}\times۵^{۲}\times۷}=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۵\times\sqrt{۷}=۷۲۰\sqrt{۷}$$

۱۸۸.گزینهٔ «۳»

$$\frac{\sqrt[۴]{(۳^{۳}\times۲)^{۳}}\times\sqrt[۴]{(۳^{۲}\times۲)^{۲}}}{\sqrt[۴]{(۲^{۲}\times۳)^{۵}}}=\frac{\sqrt[۴]{۳^{۹}\times۲^{۳}\times۳^{۴}\times۲^{۲}}}{\sqrt[۴]{۲^{۱۰}\times۳^{۵}}}=\frac{\sqrt[۴]{۲^{۵}\times۳^{۱۳}}}{\sqrt[۴]{۲^{۱۰}\times۳^{۵}}}=\sqrt[۴]{\frac{۳^{۸}}{۲^{۵}}}=\frac{۳^{۲}}{\sqrt[۴]{۲^{۴}\times۲}}=\frac{۹}{۲\sqrt[۴]{۲}}$$

۱۸۹.گزینهٔ «۱»

$$\sqrt{(۲^{۳}\times۳)^{۲}}\times\sqrt{(۲^{۲}\times۳^{۲})^{۳}}=\sqrt{۲^{۶}\times۳^{۲}}\times\sqrt{۲^{۶}\times۳^{۶}}=\sqrt{۲^{۱۲}\times۳^{۸}}=۲^{۶}\times۳^{۴}=(۲^{۳})^{۲}\times(۳^{۲})^{۲}\times(۳^{۲})^{۲}=۸^{۲}\times۹^{۲}=۷۲^{۲}$$

۱۹۰.گزینهٔ «۱»

نکته اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ قابل تعریف باشند، آنگاه: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=(\sqrt[n]{a})^{\frac{۱}{m}}=(a^{\frac{۱}{n}})^{\frac{۱}{m}}=a^{\frac{۱}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{۵^{۲}\times۵}}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt[۴]{۵^{۳}}}{\sqrt[۲\times۲]{۵^{۱\times۲}}}=\frac{\sqrt[۴]{۵^{۳}}}{\sqrt[۴]{۵^{۲}}}=\sqrt[۴]{۵}$$

۱۹۱.گزینهٔ «۳»

$$(\frac{(۲^{۲})^{۰/۷۵}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+(۳^{۲})^{۰/۲۵})(۲^{۰/۵}-۱)=(\frac{۲^{۱/۵}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+۳^{۰/۵})(۲^{۰/۵}-۱)$$

$$(\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+۳^{\frac{۱}{۲}})(۲^{\frac{۱}{۲}}-۱)\Rightarrow(\frac{\sqrt{۲^{۳}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-۱)=(\frac{\sqrt{۲^{۲}\times۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-۱)$$

$$=(\frac{۲\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-۱)=(\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۶}+۳}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}})(\sqrt{۲}-۱)=\frac{۴+\cancel{\sqrt{۶}}+\sqrt{۱۲}+۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-\cancel{\sqrt{۶}}-۳}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{۴+\sqrt{۴\times۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-۳}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۱+۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۱+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=۱$$

۱۹۲.گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{k^{۴}kr^{۲}r}-۳kr\sqrt{k^{۲}kr}=k^{۲}r\sqrt{kr}-۳krk\sqrt{kr}=k^{۲}r\sqrt{kr}-۳k^{۲}r\sqrt{kr}=-۲k^{۲}r\sqrt{kr}$$