

فصل هفتم : آمار و احتمال

درس اول:

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

درس دوم:

آمار توصیفی

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل:

در سالهای گذشته خواندیم:

آزمایش: در علم احتمال، به هر عملی که برای جمع آوری داده ها صورت می پذیرد آزمایش می گوئیم.

آزمایش تصادفی: آزمایشی که نتایج آن از قبل قابل پیش بینی نباشد ولی مجموعه نتایج حاصل از آزمایش قابل پیش بینی باشد را آزمایش تصادفی می گوئیم. به عنوان مثال وقتی یک تاس را به هوا پرتاب می کنیم از قبل نمی توانیم نتیجه بگیریم که کدام عدد رو خواهد شد ولی مجموعه نتایج حاصل از پرتاب تاس: $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ قابل پیش بینی است.

فضای نمونه: تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را فضای نمونه آن تجربه می نامند و معمولاً با S نمایش می دهند.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی می نامند و معمولاً هر پیشامد را با حروف بزرگ انگلیسی نشان میدهند.

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ میدهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ میدهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ میدهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

متمم یک پیشامد: پیشامد A' (A^c) زمانی رخ میدهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوئیم هرگاه A و B باهم رخ ندهند یعنی $A \cap B = \emptyset$

جایگشت: اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم به هر نحوه قرار گرفتن آن ها در کنارهم یک جایگشت می گوئیم.

توجه: تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

توجه: تعداد جایگشت های k تایی از n شیء متمایز را معمولاً با نماد $p(n,k)$ نشان میدهند و داریم:

$$p(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (\text{با شرط } k \leq n)$$

توجه: بطور کلی ترکیب های k تایی از n شیء متمایز به انتخاب های k تایی از آن n شیء اطلاق می شود که

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{در آنها ترتیب فاقد اهمیت است:}$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{فرمول کلی احتمال:}$$

فرمول محاسبه احتمال اجتماع یا اشتراک:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

تذکر: اگر در مساله ای بین دو یا چند حالت حرف « و » بیاید تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه بدست می آوریم و در هم ضرب می کنیم تا جواب نهایی بدست آید.

تذکر: اگر در مساله ای بین دو یا چند حالت کلمه « یا » بیاید تعداد هر کدام از حالت ها را جداگانه بدست می آوریم و باهم جمع می کنیم تا جواب نهایی بدست آید.

توجه: همواره در صورت سوال به صورت مستقیم حرف « و » یا کلمه « یا » ذکر نمی شود بلکه با دقت و تجزیه و تحلیل سوال باید متوجه شویم که کدام حالت مدنظر است.

پیشامد غیر ممکن: اگر در آزمایشی ، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد آن پیشامد را غیر ممکن می گوئیم و آن را با نماد \emptyset نشان می دهیم و چون تهی عضو ندارد پس $p(\emptyset) = 0$

پیشامد حتمی: اگر S پیشامدی از فضای نمونه S باشد (هر مجموعه زیر مجموعه خودش هست) چون همه اعضای فضای نمونه را دارد پیشامد حتمی است و $p(S) = 1$

چند اصل در احتمال:

اصل ۱: همیشه داریم $0 \leq p(A) \leq 1$

اصل ۲: اگر A و B ناسازگار باشند:

$$p(A \cap B) = 0 \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

اصل ۳: همیشه احتمال فضای نمونه برابر ۱ است: $p(S) = 1$

چند قضیه در احتمال:

قضیه ۱: در مورد پیشامدهای دو به دو ناسازگار A و B داریم:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

قضیه ۲: برای هر دو پیشامد A و B که $A \subseteq B$ داریم:

$$p(B-A) = p(B) - p(A), p(A) \leq p(B)$$

قضیه ۳: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

نتیجه ۱: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$

نتیجه ۲: برای پیشامد مکمل A یعنی A' داریم:

$$p(A') = 1 - p(A)$$

احتمال شرطی:

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند و $p(B) > 0$ در این صورت وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B قبلا رخ داده است را به صورت $p(A|B)$ نوشته و چنین تعریف می کنیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

توجه: در احتمال شرطی $p(A|B)$ چون از B آگاهی داریم، فضای نمونه محسوب شده و جانشین S می شود. در این صورت گفته می شود: فضای نمونه ای کاهش یافته است.

مثال: یک عدد طبیعی کوچکتر از ۱۱ را تصادفی انتخاب کرده ایم. مطلوبست تعیین:

الف) احتمال آمدن عدد زوج به شرط آمدن عدد مضرب ۳

ب) احتمال آمدن عدد مضرب ۳ به شرط آمدن عدد زوج

توجه: در احتمال دو نوع فضای نمونه وجود دارد. اگر فضای نمونه متناهی یا شمارای متناهی باشد آن را فضای نمونه ای گسسته گوئیم و اگر فضای نمونه ناشمارای نامتناهی باشد آن را فضای نمونه ای پیوسته گوئیم اما در

کتاب پایه یازدهم تجربی فقط با فضای نمونه ای گسسته سروکار داریم و در این فضا داریم:

$$p(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

مثال: یک جفت تاس را می ریزیم، اگر عدد آنها مختلف باشد احتمال آنکه مجموع دو عدد زوج باشد را بدست آورید.

توجه: برای $A \cap B$: دنبال اعدادی می گردیم که مجموعشان زوج و هر دو عدد متفاوت باشند پس:

$$A \cap B: \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,1), (3,5), (4,2), (4,6), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}$$

مثال: در جامعه ای درصد نوع خون به شرح زیر است:

$$\text{نوع A: } 0/17 \quad \text{نوع AB: } 0/13 \quad \text{نوع B: } 0/20 \quad \text{نوع O: } 0/50$$

مجروحی را به بخش اورژانس بیمارستان آورده اند، احتمال اینکه گروه خونی بیمار از نوع AB یا O باشد چقدر است؟

اگر E پیشامد گروه خونی AB و f پیشامد گروه خونی O باشد چون این دو گروه خونی همزمان در یک شخص نمی تواند باشد بنابراین اشتراک آنها نیز تهی است یعنی دو پیشامد ناسازگارند پس:

$$p(E \cup f) = p(E) + p(f) \Rightarrow p(E \cup f) = \frac{17}{100} + \frac{50}{100} = \frac{67}{100} = 67\%$$

مثال: خانواده ای دارای ۴ فرزند است احتمال اینکه لااقل یکی از فرزندان دختر باشد چقدر است؟

سوال: اگر $p(A \cup B) = 0.6$ و $p(A) = 0.2$ و $p(B|A) = 0.1$ باشد $p(B)$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر $p(A|B) = \frac{1}{3}$ و $p(B|A) = \frac{1}{4}$ و $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$ باشد $p(A-B)$ را بدست آورید.

سوال: در امتحانات یک کلاس ۲۰٪ دانش آموزان در ریاضی، ۱۵٪ در فیزیک و ۱۰٪ در هر دو درس تجدید شده اند. احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس در درس فیزیک تجدید شده باشد مشروط به اینکه در درس ریاضی تجدید شده باشد را بدست آورید.

سوال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S بوده و $p(A) = 0.4$ و $p(B) = 0.5$ و $p(A \cup B) = 0.7$ مطلوبست محاسبه $p(A|B')$

راهنمایی: $p(A \cap B') = p(A - B)$

سوال: در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر فوتبالیست هستند دو نفر به تصادف انتخاب می کنیم اگر نفر اول فوتبالیست باشد چقدر احتمال دارد که نفر دوم هم فوتبالیست باشد. (استعدادهای درخشان - شهید بهشتی اهواز خرداد ۹۷)

سوال: اعداد ۱ تا ۶ را روی ۶ کارت نوشته و سپس دو کارت از بین آنها به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آن که مجموع اعداد روی دو کارت زوج باشد به شرط آن که مجموع آنها مضرب ۳ باشد.

سوال: احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر $0/625$ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد. (تمرین ۵ صفحه ۱۵۲ کتاب درسی)

سوال: از بین اعداد یک رقمی طبیعی دو عدد به تصادف انتخاب می کنیم اگر این دو عدد اول باشند چقدر احتمال دارد متوالی باشند.

پیشامدهای مستقل:

تعریف: دو پیشامد A و B را مستقل گوئیم هرگاه رخ دادن یکی از آنها تاثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد در این صورت: $p(A|B)=p(A)$

اگر دو پیشامد مستقل نباشند آنها را وابسته گوئیم.

توجه: اگر رخ دادن A تاثیری در احتمال وقوع B نداشته باشد آنگاه رخ دادن B نیز تاثیری در احتمال وقوع A ندارد.

توجه: هر گاه A و B دو پیشامد مستقل باشند مهمترین رابطه ای که بین آنها برقرار است رابطه $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ می باشد.

توجه: ناسازگار بودن، هیچ رابطه ای با مستقل بودن ندارد به عبارت دیگر اگر A و B ناسازگار باشند: $p(A \cap B) = 0$ در صورتیکه $p(A) \times p(B) \neq 0$ بنابراین: $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

مثال: فرض کنید دو تاس سالم را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که تاس اول ۲ بیاید و B پیشامد آن باشد که تاس دوم ۴ بیاید. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال: فرض کنید A و B پیشامدهای مستقل با شرط $p(A) = \frac{1}{4}$ و $p(AUB) = 2p(B) - p(A)$ باشند. حاصل $p(B|A)$ را محاسبه کنید.

سوال: احتمال آنکه خانم یک خانواده تا ۵۰ سال دیگر زنده بماند $0/6$ و همین احتمال برای آقای خانواده $0/8$ است. تعیین کنید احتمال آنکه:

الف) تا ۵۰ سال دیگر هر دو زنده بمانند.

ب) هیچ یک زنده نماند

ج) حداقل یکی زنده بماند

راهنمایی: $p(\text{هر دو مرده}) = 1 - p(\text{حداقل یکی زنده بماند}) = p$

سوال: احتمال آنکه در خانواده A ، فرزندی با رنگ چشم روشن متولد شود ۲۰٪ و احتمال آنکه در خانواده B فرزندی با رنگ چشم روشن متولد شود ۷۵٪ است چقدر احتمال دارد حداقل یکی از این دو نوزاد با چشم هایی به رنگ روشن متولد شود؟

سوال: اگر $p(A) = 0.4$ و $p(B) = 0.6$ و $p(A \cup B) = 0.8$ باشد در این صورت $p(A \cap B')$ را تعیین کنید.

سوال: نشان دهید اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آنگاه A و B' نیز مستقل هستند.

سوال: اگر $p(A) = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{3}$ و دو پیشامد ناسازگار باشند مقدار $p(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر $p(A') = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{3}$ و دو پیشامد مستقل باشند مقدار $p(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

سوال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $p(A) = \frac{2}{5}$ و $p(A \cup B) = \frac{1}{4}$ آنگاه $p(B')$ را بدست آورید.

(نهایی ریاضی (۳) تجربی خرداد ۹۵)

سوال: سکه سالمی راسه بارپرتاب می کنیم اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟ (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۰)

سوال: احتمال آنکه شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند $0/6$ و احتمال آن که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند $0/7$ است. چقدر احتمال دارد: حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند. (نهایی ریاضی (۳) خرداد ۹۶)

سوال: اگر $p(A) = \frac{1}{3}$ و $p(B) = \frac{1}{4}$ و $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ باشند در این صورت $p(B|A') + p(A'|B')$ را بدست آورید. (استعدادهای درخشان یادگار ولایت استان فارس خرداد ۹۷)

سوال: احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $0/8$ و روی بیمار دیگر $0/5$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود احتمال اینکه روی هیچکدام موفقیت آمیز نباشد چقدر است؟

نکات کلیدی:

(۱) برای هر پیشامد ناتهی A همواره روابط زیر برقرار است:

$$\text{ج) } p(A|A)=1 \quad \text{ب) } p(\emptyset|A)=0 \quad \text{الف) } p(A|A')=0$$

(۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند با شرط $B \neq \emptyset$ همواره داریم:

$$P(A'|B) = 1 - p(A|B)$$

(۳) اگر A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند بطوریکه: $p(C) > 0$ آنگاه:

$$۱) p((A \cup B)|C) = p(A|C) + p(B|C) - p((A \cap B)|C)$$

$$۲) p((A - B)|C) = p(A|C) - p((A \cap B)|C)$$

(۴) در یک خانواده n فرزندی احتمال آن که دقیقا K فرزند پسر (دختر) باشد از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ بدست می آید (از این فرمول زمانی می توان استفاده کرد که تولد دختر و پسر هم شانس باشند و ترتیب فرزندان بیان نشود)

(۵) اعضای فضای نمونه ای در پرتاب n تاس برابر 6^n است.

(۶) اگر دو تاس باهم در صورت سوال باشند یعنی در مورد مجموع، تفاضل و ... سوال شود بایستی با نوشتن اعضای پیشامد تعداد آن را به دست آوریم.

(۷) از پیشامد متمم معمولا وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در اینصورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته، احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم میکنیم.

(۸) اگر A و B پیشامدهای ناسازگار باشند آنگاه:

$$p(A|B) = 0$$

$$۹) p(A \cap B) = p(B|A) p(A) \quad \text{یا} \quad p(A \cap B) = p(A|B) p(B)$$

توجه: نکته شماره ۹ به قانون دوم «بیز» معروف است و زمانی کاربرد دارد که هدف محاسبه $p(B|A)$ باشد ولی $p(A|B)$ جزو داده های مسئله بوده یا محاسبه آن آسان است و یا برعکس.

(۱۰) هرگاه A و B مستقل باشند آنگاه A و B' هم مستقل اند همینطور A' و B مستقلند.

(۱۱) هرگاه A و B مستقل باشند آنگاه A' و B' هم مستقل اند.

تست:

(۱) احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $0/9$ و برای شخص B برابر $0/8$ است. با کدام احتمال لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر موفقیت آمیز است؟ (کنکور تجربی ۹۵)

(۱) $0/92$ (۲) $0/94$ (۳) $0/96$ (۴) $0/98$

پاسخ: گزینه ۴

راهنمایی: A و B مستقلند.

(۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A \subseteq B$ و $p(A) = \frac{1}{3}$ و $p(B) = \frac{2}{4}$ آنگاه $p(B|A')$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰ خارج)

(۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: $A \subseteq B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)$

(۳) دو تاس همگن را پرتاب کرده ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد احتمال آنکه شماره یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۱)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{5}$

شماره یکی از تاس ها ۲ باشد: A

حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶: B

B: $\{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) \}$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

۴) یک تاس همگن را انداخته ایم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ (کنکور ریاضی ۸۶)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ مثل تست قبل حل کنید.

۵) تاس همگن را با چشم بسته انداخته ایم و فقط میدانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال اینکه شماره ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد کدام است؟ (کنکور خارج ریاضی ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

شبهه تست ۳

پاسخ: گزینه ۳

۶) اگر $p(A|B) = 0.16$ و $p(A) = 0.14$ و $p(B) = 0.15$ ، $p(B|A)$ کدام است؟

- (۱) 0.13 (۲) 0.145 (۳) 0.16 (۴) 0.175

پاسخ: گزینه ۴ از نکته شماره ۹ استفاده کنید.

۷) دو تاس را باهم می ریزیم. در حالی که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد با کدام احتمال جمع دو عدد روشده مضرب ۳ است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{12}$

مضرب ۳ باشد: A:

$$\Rightarrow n(A) = \underset{\text{تاس اول}}{\textcircled{2}} \times \underset{\text{تاس دوم}}{\textcircled{2}} = 4 \Rightarrow n(A') = 36 - 4 = 32$$

جمع دو عدد مضرب ۳ و خودشان مضرب ۳ نباشند $A' \cap B: \{(2,1), (1,2), (5,1), (1,5), (2,4), (4,2), (4,5), (5,4)\} \rightarrow n(A' \cap B) = 8$

$$p(B|A') = \frac{n(A' \cap B)}{n(A')} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

توجه: B را جمع دو عدد مضرب ۳ باشد در نظر گرفتیم که نیازی به نوشتن مجموعه اش نیست.

۸) احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال لااقل در یکی از این دو آزمون موفق میشود؟ (کنکور تجربی ۹۸)

$$0.184(4) \quad 0.182(3) \quad 0.176(2) \quad 0.174(1)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس دوم : آمار توصیفی:

معیارهای گرایش به مرکز: (شاخص های مرکزی)

معیارهایی هستند که محل تمرکز داده ها را نشان میدهند. در واقع اعدادی هستند که به وسیله آنها می توان یک ایده کلی درباره ویژگی مورد مطالعه بدست آورد.

به عبارت دیگر این معیارها نشان میدهند که داده های حاصل از یک بررسی یا مطالعه در ارتباط باهم و یا به طور متوسط چه وضعی دارند.

این معیارها عبارتند از: ۱- میانگین (mD) ۲- میانه (me) ۳- مُد یا نما (mo)

میانگین:

متداولترین معیار گرایش به مرکز می باشد که همانگونه که از اسمش پیداست مرکز ثقل داده هاست و از

$$\text{فرمول } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \text{ محاسبه میشود.}$$

توجه: عموماً برای نشان دادن مجموع داده ها از حرف یونانی Σ (سیگما) استفاده می شود:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

توجه: در هر جامعه آماری فقط یک میانگین وجود دارد و کلیه مقادیر متغیر در مقدار میانگین تاثیر دارند.

توجه: اگر داده ها برابر باشند میانگین آنها همین مقدار است یعنی داده ای که تکرار می شود.

$$\text{توجه: همواره داریم: } \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$$

توجه: هرگاه داده ها را با عدد ثابت a جمع کنیم میانگین جدید برابر میانگین قبلی به اضافه a خواهد بود یعنی:

اگر داده ها: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را در نظر گرفته و میانگین آنها برابر \bar{x} باشد. میانگین داده های y_1, y_2, \dots, y_n که

$$y_i = x_i + a \text{ برابر است با: } \bar{x} + a$$

توجه: هر گاه داده ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم میانگین داده های جدید نیز a برابر میانگین داده های قبلی

می شود به عبارت دیگر:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{x} \xrightarrow{y_i = ax_i} y_1, y_2, \dots, y_n \Rightarrow \bar{y} = a \bar{x}$$

مثال: میانگین ۱۲ داده آماری برابر است با ۱۴، اگر دفتردار به اشتباه نمره ۱۸ آن داده ها را ۸ خوانده باشد مطلوبست محاسبه میانگین واقعی آن داده ها.

مثال: میانگین ۱۳ داده آماری برابر است با ۱۵، اگر ۱۲ و ۱۶ به داده ها اضافه شوند میانگین چه تغییری می کند؟

سوال: اگر میانگین داده های a و b و c مقدار K باشد میانگین داده های $2a+3$ ، $2b+3$ ، $2c+3$ را تعیین کنید.

توجه: داده های خیلی بزرگ و خیلی کوچک در میانگین تاثیر گذارند.

سوال: میانگین یک سری داده برابر ۵ است. اگر تمام داده ها را ۳ برابر کرده و سپس از هر کدام ۲ واحد کم کنیم میانگین داده های جدید را محاسبه کنید.

سوال: اگر میانگین داده های $3x_i+5$ که $(i=1,2,\dots,10)$ برابر ۱۴ باشد میانگین داده های $\frac{4}{5}x_i-2$ ($i=1,2,\dots,10$) را محاسبه کنید.

سوال: میانگین نمرات یک کلاس ۲۵ نفری در درس آمار و احتمال برابر $16/5$ است جمع نمرات دانش آموزان این کلاس را بدست آورید.

سوال: میانگین داده های زیر برابر ۱۲ است. مقدار a را محاسبه کنید.

۹ و ۱۵ و ۱۸ و ۱۴ و a و ۱۵ و ۱۲ و ۱۰ و ۹ و ۴

میانه: عبارت است از مقداری که تعداد داده های بعد از آن برابر تعداد داده های قبل از آن باشد. برای محاسبه میانه ابتدا داده ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم آنگاه اگر تعداد داده ها فرد باشد داده وسط میانه است و اگر تعداد داده ها زوج باشد میانگین دو داده وسط میانه است.

توجه: در هر جامعه آماری فقط یک میانه وجود دارد.

توجه: میانه ممکن است متعلق به جامعه نباشد یعنی با هیچکدام از اعضای جامعه برابر نباشد.

توجه: اگر تمام داده های یک مجموعه آماری برابر باشند میانه نیز برابر هر یک از داده هاست.

داده دور افتاده یا پرت: داده ای است که نسبت به سایر داده ها تفاوت بسیار دارد.

توجه: میانه تحت تاثیر بزرگی یا کوچکی داده ها نیست.

توجه: اگر در داده های آماری داده دور افتاده وجود داشته باشد میانه به دلیل اینکه تحت تاثیر داده های پرت نیست نسبت به میانگین معیار مناسبتری است پس در چنین مواردی از میانه استفاده می کنیم.

توجه: به میانه چارک دوم (Q_2) هم گفته می شود.

سوال: در هر کدام از حالت‌های زیر میانه را محاسبه کنید.

الف) ۷ و ۱ و ۳ و ۵ و ۴ و ۲ (الف)

ب) ۱ و ۶ و ۲ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱ و ۳ (ب)

مُد (نما): در یک مجموعه داده های آماری هر داده که نسبت به بقیه داده ها تکرار بیشتری داشته باشد مُد نامیده می شود.

توجه: مد یکتا نیست، ممکن است یک مجموعه داده های آماری بیش از یک مد داشته باشد.

توجه: اگر تمام داده های یک مجموعه داده های آماری برابر باشند این داده ها مد ندارند.

توجه: مد تحت تاثیر تکرار اعداد است.

سوال: در هر یک از حالت های زیر مد را بیابید.

⇒ ۷ و ۲ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۳ و ۲ (الف)

⇒ ۴ و ۵ و ۳ و ۷ و ۴ و ۱ و ۱ (ب)

دامنه میان چارکی: اگر برای داده های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم چارک اول یا Q_1 محاسبه می شود و اگر برای داده های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه حساب کنیم چارک سوم یا Q_3 محاسبه می شود. تفاضل این دو چارک یعنی $Q_3 - Q_1$ دامنه میان چارکی است که داده های دور افتاده در آن تاثیری ندارند و به همین دلیل کارایی بیشتری نسبت به دامنه تغییرات دارد.

توجه: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم آنگاه ۲۵ درصد آنها کوچکتر یا مساوی Q_1 و ۷۵ درصد آنها بزرگتر یا مساوی Q_1 هستند.

توجه: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم ۵۰ درصد آنها کوچکتر یا مساوی Q_2 و ۵۰ درصد آنها بزرگتر یا مساوی Q_2 قرار دارند.

توجه: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم ۷۵ درصد آنها کوچکتر یا مساوی Q_3 و ۲۵ درصد آنها بزرگتر یا مساوی Q_3 می باشند.

سوال: داده های ۱۲ و ۹ و ۵ و ۲ و ۳ و ۷ و ۴ و ۱ و ۲ را در نظر بگیرید و مجموع چارک های آنها را محاسبه کنید.

سوال: داده های ۲۰ و ۱۱ و ۹ و ۱۵ و ۳ و ۳ و ۲ و ۱ و ۵ و ۱۲ و ۷ و ۵ را در نظر بگیرید و میانگین داده های بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم را محاسبه کنید.

واریانس یا پراش:

تغییر زمانی معنی می یابد که هر یک از داده ها نسبت به یک مرکز مقایسه شوند و بهترین مرکز برای داده ها میانگین است و آن شاخص پراکندگی که با میانگین ارتباط دارد واریانس نام دارد که از رابطه $\sigma^2 =$

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

بدست می آید که آن را به

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

صورت هم نشان میدهند.

بنابراین برای محاسبه واریانس: باید ابتدا میانگین داده ها را محاسبه کنیم سپس اختلاف هر داده با میانگین را محاسبه کرده به توان ۲ رسانده و در نهایت میانگین اعداد حاصل را بدست آوریم.

توجه: هرگاه مجموع مجذور داده ها مشخص باشد از فرمول زیر برای محاسبه واریانس استفاده می کنیم: $\sigma^2 =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

سوال: واریانس داده های ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۵ و ۲ را محاسبه کنید.

سوال: اگر مجموع مجذور ۵ داده برابر ۱۳۰ باشد و جمع ۵ داده برابر ۱۵ باشد واریانس داده ها را حساب کنید.

توجه: اگر همه داده های آماری را با عددی جمع یا تفریق کنیم واریانس تغییری نمی کند.

توجه: اگر تمام داده ها باهم برابر باشند واریانس صفر خواهد شد و برعکس.

توجه: واحد واریانس مجذور واحد متغیر داده هاست یعنی اگر داده ها بر حسب سانتی متر باشند واحد واریانس سانتی متر مربع است.

توجه: اگر همه داده های آماری در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند واریانس در مجذور آن عدد ضرب یا بر مجذور آن عدد تقسیم می شود.

توجه: اگر واریانس داده های X_1, X_2, \dots, X_n برابر σ^2 باشد واریانس داده های $ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_n+b$ برابر $a^2\sigma^2$ خواهد بود.

مثال: اگر واریانس داده های $X_1, X_2, \dots, X_{12}, 16$ برابر صفر باشد مطلوبست محاسبه میانگین داده های

$$X_1, X_2, \dots, X_9, 15, 17$$

سوال: اگر واریانس داده هایی برابر ۱۲ و میانگین آنها ۵ باشد و داده ها را ۲ برابر کنیم و هریک را با ۳ جمع کنیم واریانس چه تغییری می کند؟ میانگین چه تغییری می کند؟

انحراف معیار:

جذر واریانس را انحراف معیار می نامند.

توجه: اگر تمام داده ها با هم برابر باشند انحراف معیار صفر است و برعکس.

توجه: اگر همه داده ها را با عدد ثابتی جمع یا تفریق کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند.

توجه: اگر تمام داده ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب یا تقسیم کنیم انحراف معیار آن در $|a|$ ضرب یا تقسیم می شود.

توجه: داده های دور افتاده (پرت) در انحراف معیار تاثیر گذارند.

سوال: اگر انحراف معیار داده های آماری X_1, X_2, \dots, X_{16} برابر صفر باشد میانگین

X_1, X_2, \dots, X_{16} را بیابید.

سوال: انحراف معیار داده های ۴ و ۳ و ۵ و ۱ و ۲ را محاسبه کنید.

ضریب تغییرات:

خارج قسمت انحراف معیار بر میانگین را ضریب تغییرات می نامند و با $C.V$ نشان می دهند.

توجه: چون ضریب تغییرات واحد اندازه گیری ندارد برای مقایسه دو یا چند جامعه آماری که واحد اندازه گیری داده های آنها متفاوت است و همچنین برای مقایسه دو یا چند جامعه آماری که واریانس های برابر ولی میانگین های متفاوت داشته باشند استفاده می شود.

توجه: اگر همه داده های آماری باهم برابر باشند ضرایب تغییرات برابر صفر است و برعکس.

توجه: اگر همه داده های آماری را در یک عدد مثبت ضرب و یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم ضریب تغییرات تغییری نمی کند.

توجه: اگر به همه داده ها یک مقدار مثبت اضافه کنیم ضریب تغییرات کوچک می شود.

توجه: هر چه ضریب تغییرات داده ها کمتر باشد پراکندگی داده ها کمتر است.

سوال: ضریب تغییرات داده های ۴ و ۳ و ۱ و ۲ و ۵ را محاسبه کنید.

سوال: در تعدادی داده آماری با میانگین ۱۲ و انحراف معیار ۳ تمام داده ها را در ۲ ضرب و ۵ واحد به آن ها اضافه می کنیم ضریب تغییرات جدید را محاسبه کنید.

نکات کلیدی:

۱- هرگاه داده های X_1, X_2, \dots, X_n تشکیل تصاعد عددی دهند میانگین آنها از رابطه

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} \text{ بدست می آید.}$$

۲- هرگاه داده های X_1, X_2, \dots, X_n دارای فراوانی های f_1, f_2, \dots, f_n باشند در اینصورت میانگین از فرمول زیر محاسبه می شود. این میانگین به میانگین وزن دار معروف است.

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} \quad (N \text{ کل داده هاست.})$$

توجه: هرگاه جدول توزیع به صورت حدود طبقات باشد (مثلا از ۵-۲ تعداد ۴ باشد) در این صورت در فرمول فوق X_i ها همان مرکز دسته ها می باشند که مرکز دسته همان میانگین ابتدا و انتهای طبقه است.

۳- میانگین یک معیار فاصله ای است.

۴- اگر دو یا چند گروه از یک مجموعه داده های آماری با اندازه های متفاوت دارای میانگین مشخصی

باشند میانگین کل از فرمول $\frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}$ بدست می آید که به میانگین مرکب معروف است به عنوان مثال میانگین ۵ داده آماری برابر ۸ و میانگین ۹ داده دیگر ۱۱ است. میانگین کل داده ها از این فرمول محاسبه می شود.

۵- میانه یک معیار ترتیبی است.

۶- میانه تحت تاثیر ارزش عددی تمام اده ها قرار ندارد.

۷- اگر داده ها را k برابر کنیم میانه نیز k برابر می شود.

۸- برای داده های کیفی فقط مد را می توان تعیین نمود.

۹- مد یک معیار اسمی است.

۱۰- در معیارهای گرایش به مرکز بطور کلی برای برنامه ریزی و تصمیم گیری میانگین بهتر از میانه و مد است ولی وقتی با داده پرت در داده ها سروکار داریم میانه گزینه بهتری است.

۱۱- اگر داده های X_1, X_2, \dots, X_n تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند آنگاه واریانس از فرمول

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2-1)}{12} \text{ محاسبه می شود.}$$

۱۲- داده های دور افتاده در واریانس تاثیر گذار هستند.

تست:

۱- در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها ۲۱۹۰ است. ضریب تغییرات کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۵)

۰/۳۷۵ (۴)

۰/۳۲۵ (۳)

۰/۲۷۵ (۲)

۰/۲۲۵ (۱)

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8, \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{30} - (\bar{x})^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9$$

$$\Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow C.V = \frac{3}{8} = 0.375$$

۲- میانگین اضلاع مربع هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن ها ۶۵/۴۴ است ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۴)

۰/۲۵ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۱۵ (۲)

۰/۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: میانگین مساحت ها همان $\frac{\sum x_i^2}{n}$ است و مشابه تست بالا ادامه دهید.

۳- میانگین محیط مربع هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع ها ۴۹۰ می باشد ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۲)

۰/۳۳ (۴)

۰/۲۸ (۳)

۰/۲۷ (۲)

۰/۲۵ (۱)

$$\bar{p} = 84 \Rightarrow 4\bar{x} = 84 \Rightarrow \bar{x} = 21 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = 490 - 441 = 49$$

$$\Rightarrow \sigma = 7 \Rightarrow C.V = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \cong 0.33$$

۴- در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده ها ۳ واحد اضافه می کنیم تا داده های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده های قبلی است؟ (کنکور تجربی ۹۲)

$\frac{1}{9}$ (۴)

$\frac{7}{8}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{7}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: نسبت $\frac{CV \text{ جدید}}{CV \text{ قدیم}}$ را محاسبه کنید.

۵- در جدول فراوانی زیر، واریانس داده ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۰)

مرکز دسته	12	15	18	21	24
فراوانی	4	3	9	7	2

۱۲/۳۶ (۴)

۱۲/۲۴ (۳)

۱۱/۹۶ (۲)

۱۱/۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: از نکته شماره ۲ و ۱۳ استفاده کنید. می توانید از هر کدام از مرکز دسته ها ۱۱ واحد کم کنید تا با اعداد کوچکتری کار کنید.

۶- در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده های ناچور ۱۰، ۱۵، ۴۵، ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده های باقی مانده، تقریباً کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۳)

۱۶/۶۶ (۴)

۱۵/۳۳ (۳)

۱۴/۸۱ (۲)

۱۴/۷۲ (۱)

$$\bar{x} = \frac{25 \times 30 - (50 + 45 + 15 + 10)}{25 - 4} = \frac{750 - 120}{21} = \frac{630}{21} = 30$$

$$\sigma^2 = 8^2 = 64 \Rightarrow (\sigma')^2 = \frac{64 \times 25 - [(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2]}{25 - 4}$$

$$= \frac{1600 - 1250}{21} = 16/66$$

۷- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده های ۲۰، ۲۷، ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟ (کنکور تجربی خارج ۹۳)

۹/۶۳ (۴)

۹/۵۲ (۳)

۹/۳۶ (۲)

۹/۲۵ (۱)

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum (x_i - 25)^2}{18} \Rightarrow \sum (x_i - 25)^2 = 162$$

از آنجا که میانگین سه داده آماری اضافه شده برابر ۲۵ می باشد $(\frac{20 + 27 + 28}{3})$ بنابراین میانگین داده های جدید همان ۲۵ است.

$$(\sigma')^2 = \frac{\sum (x_i - 25)^2 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21} = \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} \approx 9.5$$

۸- ضریب تغییرات در داده های آماری زیر با فراوانی تجمعی داده شده کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۶)

مرکز دسته	6	8	10	12	14
فراوانی تجمعی	7	16	33	44	50

- ۰/۲۸ (۴) ۰/۲۴ (۳) ۰/۱۸ (۲) ۰/۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: ابتدا جدول را بر اساس فراوانی مطلق بازنویسی کنید سپس از نکته ۲ و ۱۳ استفاده کنید.

۹- در ۲۵ داده آماری مجموع تمام داده ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن ها ۳۲۵۰ می باشد ضریب تغییرات در این داده ها کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۶)

- ۰/۲۷۲۷ (۴) ۰/۲۶۷۲ (۳) ۰/۲۶۴۵ (۲) ۰/۲۵۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: شبیه تست ۱

۱۰- داده های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۵)

- ۰/۶ (۴) ۰/۵۲ (۳) ۰/۴۸ (۲) ۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ راهنمایی: میانگین و انحراف معیار ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را محاسبه کنید و سپس تغییرات را اعمال کنید.

۱۱- میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۲ و واریانس آنها ۵ است. میانگین مساحت این مربع ها کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۲)

- ۱۲۴ (۱) ۱۳۴ (۲) ۱۴۹ (۳) ۱۶۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: در فرمول $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ باید $\frac{\sum x_i^2}{n}$ را محاسبه کنید.

۱۲- در ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده ها ۷۲ و مجموع مجذورات آنها ۴۸۰ است. ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۲)

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: مشابه تست شماره ۱

۱۳- در مجموعه اعداد $\{X, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۷۰, ۷۷, ۸۰, ۶۳\}$ به ازای کدام مقدار X شاخص های میانگین، مد، میانه برابر هم هستند؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۳)

- ۶۴ (۱) ۶۵ (۲) ۶۶ (۳) ۴ نشدنی (۴)

مد داده ها، آن داده ای است که بیشترین تکرار را دارد پس X برابر هر کدام از داده های دیگر که باشد آن داده بیشترین تکرار را دارد. اگر داده ها را بدون X مرتب کنیم داریم: ۷۷ و ۷۰ و ۶۶ و ۶۵ و ۶۴ و ۶۳ و ۵۰ چون تعداد داده ها با احتساب X برابر ۸ تا است پس میانه برابر نصف مجموع دو داده وسط است. اگر X داده چهارم یا پنجم نباشد میانه برابر $\frac{۶۴+۶۵}{۲} = ۶۴/۵$ می شود که نمی تواند با مد داده ها یکسان شود زیرا $۶۴/۵$ در داده ها نداریم که بیشترین تکرار را داشته باشد پس قطعاً X یکی از دو داده وسط است. بنابراین $X=۶۵$ (میانگین داده ها برابر ۶۵ می شود)

۱۴- واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده های ۲۴، ۱۶، ۲۶ به آن اضافه شود میانگین داده ها تغییر نمی کند انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۱)

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱/۲۵ (۲)

۰/۷۵ (۱)

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می گیریم تمام داده ها باهم برابرند و چون با افزودن ۲۴، ۱۶، ۲۶ میانگین تغییری نمی کند. میانگین این ۳ عدد برابر با هر کدام از یازده داده قبلی است:

$$\bar{x} = \frac{24+16+26}{3} = 22$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(16-22)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{11} = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

۱۱ عدد

۱۵- در یک کارگاه دو گروه مشغول کار هستند میانگین نمرات مسئولیت پذیری در گروه اول به ترتیب ۲۵ و ۸۰ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می باشد. کدام گروه بهتر است؟

(کنکور تجربی ۹۸)

۴) اظهار نظری نمیتوان کرد

۳) یکسان

۲) گروه دوم

۱) گروه اول

پاسخ: گزینه ۲